01 다항식의 연산

01 다항식의 연산

1. **다항식의 덧셈**: 동류항끼리 모은 후 계수를 더하여 간단히 정리
2. **다항식의 뺄셈**: 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾼 후 더하여 정리
3. **다항식의 곱셈**: 곱셈에 대한 연산법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리

02 곱셈 공식

1. $m(a+b)=ma+mb$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
4. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
5. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
6. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
7. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
8. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
9. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
10. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
11. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

03 곱셈 공식의 변형

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
2. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
3. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
4. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
5. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
6. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
7. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

04 다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R \quad (\text{단, }(R\text{의 차수})<(B\text{의 차수}))$$

가 성립한다. 특히 $R=0$, 즉 $A=BQ$일 때, A는 B로 **나누어떨어진다**고 한다.

마·타·노·트

▶ 다항식의 덧셈에 대한 연산법칙

세 다항식 A, B, C에 대하여 덧셈에 대한 다음 연산법칙이 성립한다.

1. 교환법칙 $A+B=B+A$
2. 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

▶ 다항식의 곱셈에 대한 연산법칙

세 다항식 A, B, C에 대하여 곱셈에 대한 다음 연산법칙이 성립한다.

1. 교환법칙 $AB=BA$
2. 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$
3. 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

▶ 곱셈 공식의 변형의 활용

1. $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
2. $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

개념 확인

정답 및 풀이 p.6

[001 ~ 004] 다음 물음에 답하시오.

001 x에 대한 다항식 $2x^3-4xy+3y^3+5$의 차수와 상수항을 각각 구하시오. $2x^3$에서 차수는 3이고 상수항은 $3y^3+5$이다.

답 차수: 3, 상수항: $3y^3+5$

002 y에 대한 다항식 $x^2-6xy+5x+4y+8$의 차수와 상수항을 각각 구하시오. $-6xy+4y=(-6x+4)y$에서 차수는 1이고 상수항은 x^2+5x+8이다.

답 차수: 1, 상수항: x^2+5x+8

003 다항식 $-x+x^3+2x^2+5$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하시오. $-x+x^3+2x^2+5=x^3+2x^2-x+5$

답 x^3+2x^2-x+5

004 다항식 x^2+xy+y^2-3y+2를 y에 대하여 오름차순으로 정리하시오. $x^2+xy+y^2-3y+2=x^2+2+(x-3)y+y^2$

답 $x^2+2+(x-3)y+y^2$

[005 ~ 006] 다음 다항식을 간단히 하시오.

005 $(x^2-x+2)+(2x^2+2x-3)$

$(x^2-x+2)+(2x^2+2x-3)=(1+2)x^2+(-1+2)x+(2-3)=3x^2+x-1$

답 $3x^2+x-1$

006 $(x^2+2xy-y^2)-(2x^2+xy+y^2)$

$(x^2+2xy-y^2)-(2x^2+xy+y^2)$

$=(1-2)x^2+(2-1)xy+(-1-1)y^2=-x^2+xy-2y^2$

답 $-x^2+xy-2y^2$

007 세 다항식

$$A=x^2-x+3,\ B=x^2+2x-2,\ C=3x^2-x+1$$

에 대하여 $A-B+C$를 구하시오.

$A-B+C=(x^2-x+3)-(x^2+2x-2)+(3x^2-x+1)$

$=(1-1+3)x^2+(-1-2-1)x+(3+2+1)=3x^2-4x+6$

답 $3x^2-4x+6$

[008 ~ 013] 다음 식을 전개하시오.

008 $x(2x^2-3x+4)$ $x(2x^2-3x+4)=2x^3-3x^2+4x$

답 $2x^3-3x^2+4x$

009 $(2a+b)(a^2-b)$ $(2a+b)(a^2-b)=2a^3+a^2b-2ab-b^2$

답 $2a^3+a^2b-2ab-b^2$

010 $(3x-1)(x+2)$ $(3x-1)(x+2)=3x^2+5x-2$

답 $3x^2+5x-2$

011 $(a+2b-c)^2$ $(a+2b-c)^2=a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

답 $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

012 $(x-1)^3$ $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

답 x^3-3x^2+3x-1

013 $(a+2)(a^2-2a+4)$ $(a+2)(a^2-2a+4)=a^3+2^3=a^3+8$

답 a^3+8

[014 ~ 015] $x+y=2$, $xy=-3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

014 x^2+y^2 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4+6=10$

답 10

015 x^3+y^3 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8-3\cdot(-3)\cdot 2=26$

답 26

016 $a+b+c=2$, $ab+bc+ca=-1$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=2^2-2\cdot(-1)=4+2=6$

답 6

[017 ~ 018] 다음 물음에 답하시오.

017 다항식 $3x^2+2x-1$을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하시오.

다항식 $3x^2+2x-1$을 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $3x-4$이다.

$$\begin{array}{r} 3x-4 \\ x+2\overline{)\,3x^2+2x-1} \\ \underline{3x^2+6x} \\ -4x-1 \\ \underline{-4x-8} \\ 7 \end{array}$$

답 $3x-4$

018 다항식 $2x^3-x^2+3x+1$을 x^2-x+3으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $2x^3-x^2+3x+1$을 x^2-x+3으로 나누었을 때, 나머지는 $-2x-2$이다.

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ x^2-x+3\overline{)\,2x^3-x^2+3x+1} \\ \underline{2x^3-2x^2+6x} \\ x^2-3x+1 \\ \underline{x^2-x+3} \\ -2x-2 \end{array}$$

답 $-2x-2$

개념 적용

개념 01. 다항식의 덧셈과 뺄셈

1. 다항식의 덧셈: 동류항끼리 모은 후 계수를 더하여 간단히 정리한다.
2. 다항식의 뺄셈: 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾼 후 더하여 정리한다.

019

두 다항식 A, B에 대하여

$$A=x^2-3x+y,\quad B=-2x^2+4y-3$$

일 때, $2A-B$를 구하시오.

다항식 A에 2를 곱한 식에 다항식 B의 각 항의 부호를 바꾼 후 더하면

$$\begin{aligned}2A-B&=2(x^2-3x+y)-(-2x^2+4y-3)\\&=2x^2-6x+2y+2x^2-4y+3\\&=4x^2-6x-2y+3\end{aligned}$$

답 $4x^2-6x-2y+3$

020 중요

세 다항식 A, B, C에 대하여

$$A=2x^3+x^2-2x+1,\quad B=x^3-x,\quad C=-x^3+2x-2$$

일 때, $2(A-2B)+C$를 구하시오.

세 다항식 A, B, C를 $2(A-2B)+C$에 대입한 후, 동류항끼리 묶어서 내림차순으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}2(A-2B)+C&=2\{(2x^3+x^2-2x+1)-2(x^3-x)\}+(-x^3+2x-2)\\&=2x^2+2-x^3+2x-2\\&=-x^3+2x^2+2x\end{aligned}$$

답 $-x^3+2x^2+2x$

021

두 다항식 A, B에 대하여

$$A-B=-4xy+3y^2,\quad 2A+B=3x^2-5xy+3y^2$$

일 때, $A+B$를 구하시오.

두 다항식 A, B를 미지수로 하는 연립방정식을 생각하자.

$$\begin{cases}A-B=-4xy+3y^2 & \cdots ㉠\\2A+B=3x^2-5xy+3y^2 & \cdots ㉡\end{cases}$$

에서 ㉠+㉡을 하여 B를 소거하면 $3A=3x^2-9xy+6y^2$이므로 $A=x^2-3xy+2y^2$이고 ㉠×2−㉡을 하여 A를 소거하면 $-3B=-3x^2-3xy+3y^2$이므로 $B=x^2+xy-y^2$이다. 따라서 구하는 식은

$$\begin{aligned}A+B&=(x^2-3xy+2y^2)+(x^2+xy-y^2)\\&=2x^2-2xy+y^2\end{aligned}$$

답 $2x^2-2xy+y^2$

개념 02. 다항식의 곱셈

곱셈에 대한 연산법칙을 이용하여 전개한 후 동류항끼리 정리한다.

022

다항식 $(3x^2+x-1)(x+3)$의 전개식에서 x^2의 계수를 a, x의 계수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

주어진 식을 전개하면

$$\begin{aligned}(3x^2+x-1)(x+3)&=3x^3+9x^2+x^2+3x-x-3\\&=3x^3+10x^2+2x-3\end{aligned}$$

에서 x^2의 계수는 10이고 x의 계수는 2이므로 $a=10$, $b=2$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=12$이다.

답 12

023 중요

$(3-x+4x^2+2x^3+x^4)^2$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오.

x^4의 계수를 구하기 위해서 x^4항이 나오는 경우만 구하면 되므로

$$(3-x+4x^2+2x^3+x^4)(3-x+4x^2+2x^3+x^4)$$

에서 x^4의 동류항은

$$3\times x^4,\ -x\times 2x^3,\ 4x^2\times 4x^2,\ 2x^3\times(-x),\ x^4\times 3$$

이다. 이 항의 계수들을 계산하여 정리하면

$$(3-2+16-2+3)x^4=18x^4$$

이므로 x^4의 계수는 18이다.

답 18

024

$(x^2+y+3)(2x^2-3y-2)$의 전개식에서 x^2y의 계수를 a, x^2의 계수를 b, y^2의 계수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

주어진 식을 다항식의 곱셈을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}&(x^2+y+3)(2x^2-3y-2)\\&=2x^4-3x^2y-2x^2+2x^2y-3y^2-2y+6x^2-9y-6\\&=2x^4-x^2y+4x^2-3y^2-11y-6\end{aligned}$$

이므로 $a=-1$, $b=4$, $c=-3$이고 구하는 값은 $a+b+c=0$이다.

답 0

개념 03. 곱셈 공식

곱셈 공식 중 필요한 공식을 이용하여 전개하고, 부호에 주의한다.

025

$x^8=17$일 때, $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$의 값은?

① 8 ② 12 ③ 16

④ 20 ⑤ 24

주어진 식을 곱셈 공식을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)&=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)\\&=(x^4-1)(x^4+1)\\&=x^8-1=16\end{aligned}$$

답 ③

026 중요!

다항식 $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$를 전개하시오.

다항식의 곱셈에서 교환법칙이 성립하므로 식의 순서를 바꾼 뒤 곱셈 공식을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}&(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)\\&=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)\\&=(x^3+2^3)(x^3-2^3)\\&=x^6-2^6=x^6-64\end{aligned}$$

답 x^6-64

027

다항식

$$(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b-c)^2+(a+b+c)^2$$

을 전개하시오.

주어진 식을 곱셈 공식을 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b-c)^2+(a+b+c)^2\\&=(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca)+(a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca)\\&\quad+(a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca)+(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)\\&=4a^2+4b^2+4c^2\end{aligned}$$

답 $4a^2+4b^2+4c^2$

개념 04. 공통부분이 있는 다항식의 전개

1. 공통부분이 있는 경우, 하나의 문자로 치환하여 전개한 뒤 다시 원래의 문자에 대한 식으로 나타낸다.
2. 공통부분이 없는 경우, 공통부분이 생기도록 식을 변형한다.

028

$(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)$을 전개하시오.

공통부분을 $x^2-2x=X$로 치환하면

$$(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)=(X+1)(X-3)=X^2-2X-3$$

이다. 다시 $X=x^2-2x$를 대입하면

$$\begin{aligned}X^2-2X-3&=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3\\&=x^4-4x^3+4x^2-2x^2+4x-3\\&=x^4-4x^3+2x^2+4x-3\end{aligned}$$

답 $x^4-4x^3+2x^2+4x-3$

029 중요!

$x(x-1)(x+2)(x+3)$을 전개하면?

① $x^4+4x^3-x^2-6x$ ② $x^4+4x^3-x^2+6x$

③ $x^4+4x^3+x^2-6x$ ④ $x^4+4x^3-2x^2-6x$

⑤ $x^4+4x^3+2x^2-6x$

공통부분이 생기도록 순서를 바꾸어 전개하면

$$\begin{aligned}x(x-1)(x+2)(x+3)&=\{x(x+2)\}\{(x-1)(x+3)\}\\&=(x^2+2x)(x^2+2x-3)\end{aligned}$$

이다. 공통부분을 $x^2+2x=X$로 놓으면

$$(x^2+2x)(x^2+2x-3)=X(X-3)=X^2-3X$$

이고, 다시 $X=x^2+2x$를 대입하면

$$X^2-3X=(x^2+2x)^2-3(x^2+2x)=x^4+4x^3+x^2-6x$$

답 ③

030

다항식 $(a+b+c-1)(a-b+c+1)$을 전개하시오.

곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 전개하면

$$\begin{aligned}&(a+b+c-1)(a-b+c+1)\\&=\{(a+c)+(b-1)\}\{(a+c)-(b-1)\}\\&=(a+c)^2-(b-1)^2\\&=a^2+2ac+c^2-b^2+2b-1\end{aligned}$$

에서 식을 정리하면 $a^2-b^2+c^2+2ac+2b-1$이다.

답 $a^2-b^2+c^2+2ac+2b-1$

개념 05. 곱셈 공식의 변형 - 미지수가 2개인 경우

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
2. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

031

$a+2b=3$, $ab=-2$일 때, a^2+4b^2의 값을 구하시오.

곱셈 공식의 변형을 이용하면 다음과 같이 값을 구할 수 있다.

$$a^2+4b^2=(a+2b)^2-2\cdot a\cdot 2b$$
$$=9-4\cdot(-2)=17$$

답 17

032 중요

$x+y=4$, $x^2+y^2=12$일 때, x^3+y^3의 값은?

① 28 ② 32 ③ 36
④ 40 ⑤ 44

곱셈 공식의 변형을 이용하여 xy의 값을 구하면

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \quad \Rightarrow \quad 12=16-2xy$$

에서 $xy=2$이다. 다시 곱셈 공식의 변형을 이용하면 다음과 같이 값을 구할 수 있다.

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=64-3\cdot 2\cdot 4=40$$

답 ④

개념 06. 곱셈 공식의 변형 - 역수 관계인 경우

1. $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$
2. $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

033

$x^2-x=1$일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$x^2-x=1$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누어 정리하면 $x-\frac{1}{x}=1$이다.
곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$$

답 ③

034 중요

$x^2+\frac{1}{x^2}=3$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구하시오. (단, $x>0$)

구하는 식은

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

이므로 식 $x+\frac{1}{x}$의 값이 필요하다. 식 $x^2+\frac{1}{x^2}=3$에서 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \quad \Rightarrow \quad 3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

에서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5$이고 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$이다. 따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

답 $2\sqrt{5}$

개념 07. 곱셈 공식의 변형 - 미지수가 3개인 경우

1. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
2. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

035 중요

세 실수 a, b, c에 대하여

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

이다. $a=2$일 때, 가로와 세로의 길이가 각각 b, c인 직사각형의 넓이는?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

주어진 등식을 변형하면

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

이고 a, b, c가 실수이므로 $a=b=c$이다. $a=2$일 때, $b=c=2$이므로 구하는 직사각형의 넓이는 $bc=4$이다.

답 ①

036

$x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=22$, $xyz=3$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$의 값을 구하시오.

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$$22=4^2-2(xy+yz+zx)$$

이므로 $xy+yz+zx=-3$이다. 따라서 구하는 식의 값은

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{-3}{3}=-1$$

답 -1

개념 08. 곱셈 공식의 응용

1. 수를 문자로 치환한 후 곱셈 공식을 이용하여 쉽게 계산한다.
2. 도형의 조건을 문자를 이용한 식으로 나타낸 후 곱셈 공식을 이용하여 푼다.

037

$(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$의 값은?

① $\frac{1}{3}(2^{16}+1)$ ② $\frac{1}{3}(2^{32}-1)$ ③ $\frac{1}{3}(2^{32}+1)$

④ $\frac{1}{3}(2^{64}-1)$ ⑤ $\frac{1}{3}(2^{64}+1)$

주어진 식에 $\frac{2^2-1}{2^2-1}=1$을 곱하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \frac{2^2-1}{2^2-1}(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= \frac{1}{3}(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= \frac{1}{3}(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= \frac{1}{3}(2^{16}-1)(2^{16}+1)=\frac{1}{3}(2^{32}-1)\end{aligned}$$

답 ②

038

$(100-2)(100^2+100\cdot2+2^2)$의 값을 구하시오.

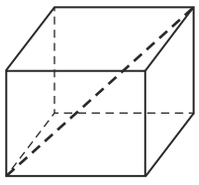
$100=a$, $2=b$로 놓고 곱셈 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}(100-2)(100^2+100\cdot2+2^2) &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3-b^3=100^3-2^3=999992\end{aligned}$$

답 999992

039 중요!

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 겉넓이가 22이고 모든 모서리 길이의 합이 24일 때, 이 직육면체의 대각선의 길이는?



① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

직육면체의 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 했을 때

$$4(a+b+c)=24,\quad 2(ab+bc+ca)=22$$

이므로 $a+b+c=6$, $ab+bc+ca=11$이다. 직육면체의 대각선의 길이는

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2+c^2} &= \sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}\\ &= \sqrt{6^2-22}=\sqrt{14}\end{aligned}$$

답 ④

개념 09. 다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 다음 등식이 성립한다.

$$A=BQ+R \quad (\text{단, } (R\text{의 차수})<(B\text{의 차수}))$$

040

다항식 $2x^3-x^2+3x+1$을 x^2-2로 나누었을 때의 몫과 나머지의 합을 구하시오.

다항식 $2x^3-x^2+3x+1$을 x^2-2로 나누었을 때,

$$\begin{array}{r} 2x\ \ -1 \\ x^2-2\overline{)\,2x^3-x^2+3x+1} \\ \underline{2x^3\ \ \ \ -4x} \\ -x^2+7x+1 \\ \underline{-x^2\ \ \ \ +2} \\ 7x-1 \end{array}$$

몫은 $2x-1$이고 나머지는 $7x-1$이므로 구하는 몫과 나머지의 합은 $(2x-1)+(7x-1)=9x-2$이다.

답 $9x-2$

041

다항식 A를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $3x^2-4x+1$, 나머지가 $5x-3$일 때, 다항식 A를 구하시오.

다항식 A를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $3x^2-4x+1$, 나머지가 $5x-3$이므로 다음 관계식이 성립한다.

$$A=(x^2+x+1)(3x^2-4x+1)+5x-3$$

따라서 구하는 다항식 A는

$$\begin{aligned}A &= (x^2+x+1)(3x^2-4x+1)+5x-3\\ &= (3x^4-x^3-3x+1)+5x-3\\ &= 3x^4-x^3+2x-2\end{aligned}$$

답 $3x^4-x^3+2x-2$

042 중요!

다항식 $2x^4-x^3+2x^2-5x+2$를 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $2x^2+3x+4$이고, 나머지가 $-3x-6$일 때, 다항식 A를 구하시오.

$P=2x^4-x^3+2x^2-5x+2$라 두고 다항식 P를 나눗셈으로 나타내면

$$\begin{aligned}P &= 2x^4-x^3+2x^2-5x+2\\ &= A(2x^2+3x+4)-3x-6\end{aligned}$$

이다. 이때 사차식 P를 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 이차식이므로 다항식 A도 이차식이고, 나머지가 일차식이므로 이차식 A로 나누었을 때 나머지는 $-3x-6$으로 같다. 따라서 다항식 P를

$$P=(2x^2+3x+4)A-3x-6$$

으로 나타낼 수 있고 다항식 A는 다항식 P를 $2x^2+3x+4$로 나누었을 때의 몫과 같다. 따라서 다항식의 나눗셈을 이용하면 $A=x^2-2x+2$이다.

$$\begin{array}{r} x^2\ \ -2x\ \ +2 \\ 2x^2+3x+4\overline{)\,2x^4\ -x^3+2x^2-5x+2} \\ \underline{2x^4+3x^3+4x^2} \\ -4x^3-2x^2-5x \\ \underline{-4x^3-6x^2-8x} \\ 4x^2+3x+2 \\ \underline{4x^2+6x+8} \\ -3x-6 \end{array}$$

답 x^2-2x+2

043

두 다항식 $A=x^2+3xy-y^2$, $B=3x^2-xy+y^2$에 대하여 $A-(X-2B)=B$가 성립할 때, 다항식 X를 구하시오.

주어진 등식 $A-(X-2B)=B$를 X에 대하여 정리하면

$$X=A+B=(x^2+3xy-y^2)+(3x^2-xy+y^2)=4x^2+2xy$$

답 $4x^2+2xy$

044

두 다항식 $A=a^3+2a-3$, $B=a^3+a+2$에 대하여 A^2-B^2의 전개식에서 a^2의 계수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

주어진 식을 인수분해하면

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)=(a-5)(2a^3+3a-1)$$
$$=2a^4-10a^3+3a^2-16a+5$$

이므로 a^2의 계수는 3이다.

답 ③

045

$a=\sqrt{3}+1$, $b=\sqrt{3}-1$일 때, a^6-b^6의 값을 구하시오.

$a+b=2\sqrt{3}$, $a-b=2$, $ab=2$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=24\sqrt{3}-12\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$
$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=8+12=20$$

이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=20\cdot12\sqrt{3}=240\sqrt{3}$$

답 $240\sqrt{3}$

046

등식

$$(3^3+2)(3^6+4)(3^{12}+16)=\frac{3^a-256}{25}$$

을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

주어진 등식의 좌변을 다음과 같이 변형하여 정리하면

$$(3^3+2)(3^6+4)(3^{12}+16)=(3^3+2)(3^6+2^2)(3^{12}+2^4)$$
$$=\frac{(3^3-2)(3^3+2)(3^6+2^2)(3^{12}+2^4)}{3^3-2}$$
$$=\frac{(3^6-2^2)(3^6+2^2)(3^{12}+2^4)}{25}$$
$$=\frac{(3^{12}-2^4)(3^{12}+2^4)}{25}$$
$$=\frac{3^{24}-2^8}{25}=\frac{3^{24}-256}{25}$$

이므로 구하는 값은 $a=24$이다.

답 24

서술형

047

다항식 $P(x)$를 다항식 x^2-2x-1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$일 때, $xP(x)$를 x^2-2x-1로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 다항식 x^2-2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-2x-1)Q(x)+3x-1$$

이다. 양변에 x를 곱하여 전개하면

$$\begin{aligned}xP(x)&=x\{(x^2-2x-1)Q(x)+3x-1\}\\&=x(x^2-2x-1)Q(x)+x(3x-1)\\&=(x^2-2x-1)xQ(x)+3x^2-x\end{aligned}$$

이다. 이때 $(x^2-2x-1)xQ(x)$는 x^2-2x-1로 나누어떨어지므로 $xP(x)$를 x^2-2x-1로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $3x^2-x$를 x^2-2x-1로 나누었을 때의 나머지와 같다. 즉,

$$3x^2-x=(x^2-2x-1)\cdot 3+5x+3$$

이므로 구하는 나머지는 $5x+3$이다.

$$\begin{array}{r}3\\ x^2-2x-1\overline{)\,3x^2\ -x}\\ \underline{3x^2-6x-3}\\ 5x+3\end{array}$$

답 $5x+3$

048 마탑

세 실수 a, b, c의 평균이 3이고 표준편차가 $\sqrt{14}$일 때, 세 실수 ab, bc, ca의 평균은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

세 실수 a, b, c의 평균이 3이므로 $\dfrac{a+b+c}{3}=3$에서 $a+b+c=9$이고 세 실수 a, b, c의 표준편차가 $\sqrt{14}$이므로

$$\frac{(a-3)^2+(b-3)^2+(c-3)^2}{3}=14$$

$$\Rightarrow\ a^2+b^2+c^2-6(a+b+c)+27=42$$

$$\Rightarrow\ a^2+b^2+c^2=69$$

이다. 따라서 세 실수 ab, bc, ca의 평균은 다음과 같다.

$$\frac{ab+bc+ca}{3}=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{9^2-69}{3\cdot 2}=\frac{12}{6}=2$$

답 ①

049

$a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=18$일 때, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$의 값을 구하시오.

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$이므로 $ab+bc+ca$의 값을 구해야 한다. [40%]

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$$36=18+2(ab+bc+ca)$$

이므로 $ab+bc+ca=9$이다. [40%]

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2&=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\\&=2\cdot 18-2\cdot 9=18\end{aligned}$$

이다. [20%]

답 18

050

사랑이는 사차식 A를 다항식 x^2-2x-1로 나누는 과정에서 다항식 A의 x^3의 부호를 잘못 보아서 몫이 $3x^2+x+7$이고 나머지가 $15x+6$이 나왔다. 다항식 A를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫과 나머지의 합을 구하시오.

x^3의 부호를 잘못 본 다항식을 A'이라 하자. A'을 x^2-2x-1로 나누었을 때의 몫이 $3x^2+x+7$이고 나머지가 $15x+6$이므로

$$\begin{aligned}A'&=(x^2-2x-1)(3x^2+x+7)+15x+6\\&=3x^4-5x^3+2x^2-15x-7+15x+6\\&=3x^4-5x^3+2x^2-1\end{aligned}$$

이다. [40%]

사랑이는 x^3의 부호를 잘못 보았으므로 $A=3x^4+5x^3+2x^2-1$이고 ... [10%]

다항식 A를 x^2+2x-1로 나누면

$$\begin{array}{r}3x^2\ -x\ +7\\ x^2+2x-1\overline{)\,3x^4+5x^3+2x^2\ \ \ -1}\\ \underline{3x^4+6x^3-3x^2}\\ -x^3+5x^2\\ \underline{-x^3-2x^2\ +x}\\ 7x^2\ -x-1\\ \underline{7x^2+14x-7}\\ -15x+6\end{array}$$

이므로 몫은 $3x^2-x+7$이고, 나머지는 $-15x+6$이다. [40%]

따라서 구하는 몫과 나머지의 합은

$$(3x^2-x+7)+(-15x+6)=3x^2-16x+13$$

이다. [10%]

답 $3x^2-16x+13$

02 항등식과 나머지정리

01 항등식

1. 항등식: 문자의 값에 관계없이 **항상 성립**하는 등식

2. 항등식의 성질

(1) 등식 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이다. $\iff$ $a=0, b=0$

(2) 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다. $\iff$ $a=0, b=0, c=0$

(3) 등식 $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다. $\iff$ $a=0, b=0, c=0$

3. 미정계수법

(1) **수치대입법**: 문자에 적당한 값을 대입하여 미정계수를 구하는 방법

(2) **계수비교법**: 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 구하는 방법

4. 다항식의 나눗셈과 항등식

x에 대한 다항식 A를 x에 대한 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

(1) $A=BQ+R$는 x에 대한 항등식이다.

(2) (R의 차수) < (B의 차수)

(3) (B의 차수) + (Q의 차수) = (A의 차수)

02 나머지정리와 인수정리

1. 나머지정리

(1) 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$이다.

(2) 다항식 $P(x)$를 $ax+b\,(a\neq 0)$으로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

2. 인수정리: 다항식 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다. $\iff$ $P(\alpha)=0$

03 조립제법

다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나눌 때, 계수만 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

./ 다항식 $3x^3-8x^2+5x+1$을 $x-2$로 나눌 때, 다항식의 나눗셈과 조립제법

$$\begin{array}{r} 3x^2-2x+1 \\ x-2\overline{)\,3x^3-8x^2+5x+1} \\ \underline{3x^3-6x^2} \\ -2x^2+5x \\ \underline{-2x^2+4x} \\ x+1 \\ \underline{x-2} \\ 3 \end{array}$$

← 몫

← 나머지

〈 다항식의 나눗셈 〉

3 (x^2의 계수)

$-8+2\times 3=-2$ (x의 계수)

$5+2\times(-2)=1$ (상수항)

$1+2\times 1=3$

	3	−8	5	1
2		6	−4	2
	3	−2	1	3

〈 조립제법 〉

마·타·노·트

▶ **방정식**

문자의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하는 등식

▶ **항등식의 다른 표현들**

1. x의 값에 상관없이 항상 성립하는 등식
2. x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
3. 모든 x에 대하여 성립하는 등식
4. 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
5. x가 어떤 값을 가지더라도 항상 성립하는 등식

▶ **인수정리의 다른 표현들**

1. $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
2. $x-\alpha$가 $P(x)$의 인수이다.
3. 다항식 $Q(x)$에 대하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$이다.

▶ **조립제법의 응용**

$$P(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$
$$=(ax+b)\cdot\frac{1}{a}Q(x)+R$$

개념 확인

정답 및 풀이 p.11

[051 ~ 053] 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

051 $(a-2)x^2+(b+2)x+c-3=0$ $a-2=0$, $b+2=0$, $c-3=0$

답 $a=2$, $b=-2$, $c=3$

052 $ax^2+bx+c=x^2+x-1$ $a=1$, $b=1$, $c=-1$

답 $a=1$, $b=1$, $c=-1$

053 $(a-1)x^2+bx+c+3=4x^2+2x-1$ $a-1=4$, $b=2$, $c+3=-1$

답 $a=5$, $b=2$, $c=-4$

[054 ~ 056] 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

054 $x(ax+b)+3x+c-1=2x^2-x+6$

$ax^2+(b+3)x+c-1=2x^2-x+6$이므로 $a=2$, $b+3=-1$, $c-1=6$이다.

답 $a=2$, $b=-4$, $c=7$

055 $ax+b(x-2)=7x-8$

$x=0$을 대입하면 $-2b=-8$에서 $b=4$이고, $x=2$를 대입하면 $2a=6$에서 $a=3$이다.

답 $a=3$, $b=4$

056 $ax(x-1)+b(x-1)(x-2)+cx(x-2)=2x^2-x+2$

$x=0$을 대입하면 $2b=2$에서 $b=1$, $x=1$을 대입하면 $-c=3$에서 $c=-3$,

$x=2$를 대입하면 $2a=8$에서 $a=4$이다.

답 $a=4$, $b=1$, $c=-3$

[057 ~ 058] 다음 등식이 모든 실수 x, y에 대하여 성립할 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

057 $2x+by=(4+a)x+3y$ 양변의 x와 y의 계수를 각각 비교하면

$2=4+a$, $b=3$이므로 $a=-2$, $b=3$이다.

답 $a=-2$, $b=3$

058 $(3x-y)a+2(x+y)b-2=x+5y+c$

$(3a+2b)x+(-a+2b)y-2=x+5y+c$가 x, y에 대한 항등식이므로

$$3a+2b=1,\quad -a+2b=5,\quad -2=c$$

이다. 위의 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$, $c=-2$이다.

답 $a=-1$, $b=2$, $c=-2$

[059 ~ 060] 다항식 $P(x)=3x^3+x^2-2x+1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

059 $x-2$ 나머지정리에 의하여 $P(2)=24+4-4+1=25$이다.

답 25

060 $2x-1$ 나머지정리에 의하여 $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-1+1=\frac{5}{8}$이다.

답 $\frac{5}{8}$

[061 ~ 062] 다항식 $P(x)=2x^3-x^2+ax-1$이 다음 다항식을 인수로 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

061 $x-1$ 인수정리에 의하여 $P(1)=2-1+a-1=0$이다. 따라서 구하는 값은 $a=0$이다.

답 0

062 $2x-1$ 인수정리에 의하여 $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{8}-\frac{1}{4}+\frac{a}{2}-1=0$이다. 따라서 구하는 값은 $a=2$이다.

답 2

063 다항식 x^3-2x^2+3x+4를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 구하시오. 조립제법을 이용하여 다항식 x^3-2x^2+3x+4를 $x+1$로 나누면

-1	1	-2	3	4
		-1	3	-6
	1	-3	6	-2

이다. 따라서 구하는 몫은 x^2-3x+6이고 나머지는 -2이다.

답 몫: x^2-3x+6, 나머지: -2

개념 적용

개념 01. 항등식의 성질

1. 등식 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이다.
 $\iff a=0, b=0$
2. 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
 $\iff a=0, b=0, c=0$
3. 등식 $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다.
 $\iff a=0, b=0, c=0$

064

등식 $(a-1)x^2+bx+3=-2x+c$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

등식 $(a-1)x^2+bx+3=-2x+c$가 x에 대한 항등식이므로

$$a-1=0,\quad b=-2,\quad 3=c$$

에서 $a=1, b=-2, c=3$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c=2$이다.

답 ②

065 중요!

등식 $(2x-y)a+(x-y)b=-ax+4y$가 x, y에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

등식을 전개하여 좌변으로 이항하면

$$(3a+b)x-(a+b+4)y=0$$

이다. 이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$$3a+b=0,\quad a+b=-4$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-6$이고 구하는 값은 $a-b=8$이다.

답 ②

066

등식 $x^2+ax+by^2+1=0$이 $x-y=1$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 성립할 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 4
④ 5 ⑤ 10

$x-y=1$에서 y를 x에 대한 식으로 표현하면 $y=x-1$이다. 이 식을 등식 $x^2+ax+by^2+1=0$에 대입하여 정리하면

$$x^2+ax+b(x-1)^2+1=(b+1)x^2+(a-2b)x+b+1=0$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$b+1=0,\quad a-2b=0$$

에서 $a=-2, b=-1$이므로 구하는 값은 $a^2+b^2=5$이다.

답 ④

개념 02. 미정계수법

1. 수치대입법: 문자에 적당한 값을 대입하는 방법
2. 계수비교법: 등식의 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하는 방법

067

등식 $ax^2+(b-1)(x+1)=3x^2+2x+c$가 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값은?

① 12 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 24

등식의 좌변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$ax^2+(b-1)x+b-1=3x^2+2x+c$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=3,\quad b-1=2,\quad b-1=c$$

이므로 $a=3, b=3, c=2$이다. 따라서 구하는 값은 $abc=3\cdot3\cdot2=18$이다.

답 ③

068

등식 $3x^2-5x+7=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

계수비교법을 이용하여 최고차항의 계수를 비교하면 $a=3$이다.
수치대입법을 이용하면

$x=1$을 대입 $\Rightarrow$ $c=5$ … ㉠
$x=2$를 대입 $\Rightarrow$ $b+c=9$ … ㉡

이다. 따라서 ㉠을 ㉡에 대입하면 $b=4, c=5$이고 구하는 값은 $a+b+c=3+4+5=12$이다.

답 ②

069 중요!

다항식 $P(x)$에 대하여 등식

$$(x-2)(x^3-1)P(x)=ax^6+bx^3+8$$

이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

양변에 $x=2$를 대입하면

$$0=64a+8b+8 \quad \cdots ㉠$$

이고 양변에 $x^3=1$을 대입하면

$$0=a+b+8 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-9$이고 구하는 값은 $a-b=10$이다.

답 ③

개념 03. 다항식의 나눗셈과 항등식

x에 대한 다항식 A를 x에 대한 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 다음이 성립한다.

1. $A=BQ+R$는 x에 대한 항등식이다.
2. (R의 차수) < (B의 차수)
3. (B의 차수) + (Q의 차수) = (A의 차수)

070

다항식 x^3+5x^2+ax+b가 x^2+2x-1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

다항식 x^3+5x^2+ax+b를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면

$$x^3+5x^2+ax+b=(x^2+2x-1)(x+k)$$
$$=x^3+(k+2)x^2+(2k-1)x-k$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 동류항의 계수를 비교하면

$$5=k+2,\quad a=2k-1,\quad b=-k$$

이고 연립하여 풀면 $k=3$, $a=5$, $b=-3$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=2$이다.

답 ②

071 중요!

다항식 $x^4+ax^3-2x^2+3x+b$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $4x+5$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

$P(x)=x^4+ax^3-2x^2+3x+b$라 두고 다항식 $P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-1)Q(x)+4x+5=(x-1)(x+1)Q(x)+4x+5$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 수치대입법을 이용하면

$x=1$을 대입 $P(1)=9 \Rightarrow a+b=7$ … ㉠

$x=-1$을 대입 $P(-1)=1 \Rightarrow -a+b=5$ … ㉡

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=6$이다.

답 $a=1$, $b=6$

072

다항식 x^4+2x^2-3x+4를 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 x^2+2x+3이고 나머지가 $-3x-5$일 때, 다항식 A를 구하시오.

$P(x)=x^4+2x^2-3x+4$라 하면 다항식 $P(x)$를 A로 나누었을 때의 몫이 이차식이므로 A는 이차식이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $A=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)로 놓을 수 있다. 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$P(x)=A(x^2+2x+3)-3x-5$$
$$=(x^2+ax+b)(x^2+2x+3)-3x-5$$
$$=x^4+(a+2)x^3+(2a+b+3)x^2+(3a+2b-3)x+3b-5$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$a+2=0,\quad 2a+b+3=2,\quad 3a+2b-3=-3,\quad 3b-5=4$$

이고 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$이므로 $A=x^2-2x+3$이다.

답 x^2-2x+3

개념 04. 나머지정리

1. 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$
2. 다항식 $P(x)$를 $ax+b\,(a\neq 0)$으로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

073

다항식 ax^3+x^2-2x+3을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 다항식 x^2+ax+4를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

$P(x)=ax^3+x^2-2x+3$, $Q(x)=x^2+ax+4$라 하면 나머지정리에 의하여

$$P(1)=a+1-2+3,\quad Q(-2)=4-2a+4$$

이다. 이때, $P(1)=Q(-2)$이므로 $3a=6$이고 구하는 값은 $a=2$이다.

답 2

074

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 2이고, 다항식 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1일 때, 다항식 $4P(x)-3Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

나머지정리에 의하여 $P(1)=2$, $Q(1)=1$이므로 다항식 $4P(x)-3Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$$4P(1)-3Q(1)=4\cdot 2-3\cdot 1=5$$

답 ⑤

075 중요!

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이고, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 7이다. 다항식 $P(x)$를 $(x-2)(x-3)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(4)$의 값을 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $(x-2)(x-3)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$라 하면 (단, a, b는 상수이다.)

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$$

이다. 나머지정리를 이용하면

$P(2)=2a+b=3$ … ㉠

$P(3)=3a+b=7$ … ㉡

이고 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-5$이므로 $R(x)=4x-5$이다.
따라서 구하는 값은 $R(4)=4\cdot 4-5=11$이다.

답 11

076 중요

다항식 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$일 때, 다항식 $P(-2x+6)$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$f(x)=P(-2x+6)$이라 하면 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(2)=P(-2\cdot2+6)=P(2)$이다. 한편, $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-4)Q(x)+3x-1$$
$$=(x-2)(x+2)Q(x)+3x-1$$

이므로 $P(2)=3\cdot2-1=5$이다. 따라서 구하는 값은 5이다.

답 ⑤

077

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이고, 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 1일 때, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$$P(x)=(x-1)Q(x)+3$$

이다. 또한 나머지정리에 의하여 $P(-1)=1$이므로 양변에 -1을 대입하면

$$P(-1)=-2Q(-1)+3=1$$

에서 $Q(-1)=1$이다. 따라서 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 ①

078

37^6을 38로 나누었을 때의 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

다항식 x^6을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$x^6=(x+1)Q(x)+R$$

가 성립한다. 양변에 $x=-1$을 대입하면 나머지정리에 의하여

$$(-1)^6=R \quad \Rightarrow \quad R=1$$

이므로

$$x^6=(x+1)Q(x)+1$$

이다. $x=37$을 대입하면

$$37^6=38\cdot Q(37)+1$$

이므로 구하는 나머지는 1이다.

답 ①

개념 05. 인수정리

1. 다항식 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$
2. 다항식 $P(x)$가 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

079

다항식 $x^5+2x^3+kx^2-3x-1$이 $x+1$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값을 구하시오.

$P(x)=x^5+2x^3+kx^2-3x-1$이라 하면, 다항식 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여 $P(-1)=0$이다. 따라서

$$P(-1)=-1-2+k+3-1=0$$

이므로 $k=1$이다.

답 1

080

다항식 $2x^3+x^2+ax+b$가 $x+1$, $x-1$로 각각 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$P(x)=2x^3+x^2+ax+b$라 하면 다항식 $P(x)$는 $x+1$, $x-1$로 각각 나누어떨어지므로

$$P(1)=2+1+a+b=0 \quad \cdots ㉠$$
$$P(-1)=-2+1-a+b=0 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-1$이고 구하는 값은 $ab=2$이다.

답 ②

081 중요

다항식 $2x^3+3x^2+ax+b$가 x^2+2x-3으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 53 ② 58 ③ 65
④ 68 ⑤ 73

$P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$라 하자. 다항식 $P(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $P(x)$는 x^2+2x-3으로 나누어떨어지므로

$$P(x)=(x^2+2x-3)Q(x)=(x-1)(x+3)Q(x)$$

에서 $P(1)=P(-3)=0$이다. 따라서

$$P(1)=5+a+b=0 \quad \cdots ㉠$$
$$P(-3)=-27-3a+b=0 \quad \cdots ㉡$$

이고, ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=3$이므로 구하는 값은 $a^2+b^2=73$이다.

답 ⑤

082

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-2)(x^2-3)$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

다항식 x^4+ax^2+b를 $(x-2)(x^2-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$x^4+ax^2+b=(x-2)(x^2-3)Q(x) \quad \cdots ㉠$$

이다. ㉠에 $x=2$, $x^2=3$을 각각 대입하면

$$16+4a+b=0, \quad 9+3a+b=0$$

이다. 이 두 식을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=12$이고 구하는 값은 $a+b=5$이다.

답 ⑤

083

다항식 $P(x)-2$가 x^2-5x+6으로 나누어떨어질 때, $P(x+2)$를 x^2-x로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)-2$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)-2=(x^2-5x+6)Q(x)=(x-2)(x-3)Q(x) \quad \cdots ㉠$$

이다. 다항식 $P(x+2)$를 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned}P(x+2)&=(x^2-x)Q'(x)+ax+b\\&=x(x-1)Q'(x)+ax+b\end{aligned} \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠에서 $P(2)=P(3)=2$이므로 ㉡에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$$P(0+2)=b=2, \quad P(1+2)=a+b=2$$

이고, 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$이므로 구하는 나머지는 2이다.

답 2

084 중요!

다항식 $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지고 다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지가 $x+6$일 때, 다항식 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+x-2)Q(x)+x+6\\&=(x-1)(x+2)Q(x)+x+6\end{aligned}$$

이고 $P(-2)=-2+6=4$이다. 한편 다항식 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-4)Q'(x)+ax+b\\&=(x+2)(x-2)Q'(x)+ax+b\end{aligned} \quad \cdots ㉠$$

이다. $P(-2)=4$이고, 인수정리에 의하여 $P(2)=0$이므로 이 값을 ㉠에 대입하면

$$P(2)=2a+b=0, \quad P(-2)=-2a+b=4$$

에서 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$이므로 구하는 나머지는 $-x+2$이다.

답 $-x+2$

개념 06. 조립제법

다항식 $P(x)$를 최고차항의 계수가 1인 일차식으로 나눌 때, 계수만 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법이다.

085

다음은 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3+x^2+x-3$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하시오.

a	2	1	1	−3
		b	1	−2
	2	−1	2	c

−1	2	1	1	−3
		−2	1	−2
	2	−1	2	−5

위 조립제법에서 $a=-1$, $b=-2$, $c=-5$이므로 구하는 값은 $a+b-c=2$이다.

답 2

086

다항식 $x^4+x^3-2x^2+3x+4$를 일차식 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $Q(x)$를 일차식 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하시오.

1	1	1	−2	3	4
		1	2	0	3
−2	1	2	0	3	7
		−2	0	0	
	1	0	0	3	

에서 $Q(x)=x^3+2x^2+3$이고 $x^3+2x^2+3=(x+2)x^2+3$이므로 구하는 몫은 x^2이다.

답 x^2

087 중요!

다항식 $2x^3+ax^2+bx+3$이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 13 ② 17 ③ 18
④ 20 ⑤ 25

다항식 $2x^3+ax^2+bx+3$이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 조립제법을 이용하면

1	2	a	b	3
		2	$a+2$	$a+b+2$
1	2	$a+2$	$a+b+2$	$a+b+5$
		2	$a+4$	
	2	$a+4$	$2a+b+6$	

에서 $a+b+5=0$, $2a+b+6=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-4$이고 구하는 값은 $a^2+b^2=17$이다.

답 ②

088

두 다항식 P, Q에 대하여

$$P*Q=2(P-Q)-1$$

이라 하자. 두 다항식 $A=3x^2-2x$, $B=x^2-2x-1$에 대하여

$$(2A)*(3B)=ax^2+bx+c$$

가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.

$P*Q=2(P-Q)-1$이므로

$$\begin{aligned}(2A)*(3B)&=2(2A-3B)-1=4A-6B-1\\&=4(3x^2-2x)-6(x^2-2x-1)-1\\&=12x^2-8x-6x^2+12x+6-1\\&=6x^2+4x+5=ax^2+bx+c\end{aligned}$$

이다. 위의 등식이 x에 대한 항등식이므로 각 항의 계수를 비교하면 $a=6$, $b=4$, $c=5$이고 구하는 값은 $abc=120$이다.

답 120

089

등식

$$a(x^2+2)(x-1)+b(x+1)(x-1)+c(x+1)=2x^3+x^2+3x-8$$

이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

주어진 식이 x에 대한 항등식이므로 수치대입법을 이용하면

$x=1$을 대입 $\Rightarrow$ $0+0+2c=-2$ … ㉠

$x=-1$을 대입 $\Rightarrow$ $-6a+0+0=-12$ … ㉡

$x=0$을 대입 $\Rightarrow$ $-2a-b+c=-8$ … ㉢

이다. ㉠에서 $c=-1$이고 ㉡에서 $a=2$이고 $a=2$, $c=-1$을 ㉢에 대입하면 $b=3$이다. 따라서 구하는 값은 $a^2+b^2+c^2=2^2+3^2+(-1)^2=14$이다.

답 14

090

다항식 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이다. 다항식 $P(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (단, a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=\underbrace{(x^2+1)(x-1)Q(x)}_{㉠}+\underbrace{ax^2+bx+c}_{㉡}$$

이다. 조건으로부터 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$이고, ㉠은 x^2+1로 나누어떨어지므로 ㉡을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이다. 즉,

$$ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1$$

에서 $P(x)$는

$$P(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1 \quad \cdots ㉢$$

이다. 이때, $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 ㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 나머지정리에 의하여

$$P(1)=2a+2=4 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

이다. 따라서 구하는 나머지는 다음과 같다.

$$ax^2+bx+c=1\cdot(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$$

답 x^2+x+2

091

이차식 $P(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지고, 이차식 $Q(x)$는 $x-2$로 나누어떨어진다. 다음 등식

$$P(x)Q(x)=x^4+ax^3-5x^2+b$$

가 성립할 때, $P(3)Q(3)$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

인수정리에 의하여 $P(1)=0$, $Q(2)=0$이다. 즉 $P(1)Q(1)=0$, $P(2)Q(2)=0$이다. 따라서

$$\begin{cases}P(1)Q(1)=a+b-4=0 & \cdots ㉠\\ P(2)Q(2)=8a+b-4=0 & \cdots ㉡\end{cases}$$

에서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=4$이다. 따라서

$$P(x)Q(x)=x^4-5x^2+4$$

이고 구하는 값은 $P(3)Q(3)=81-45+4=40$이다.

답 40

서술형

092

최고차항의 계수가 2인 삼차식 $P(x)$에 대하여

$$P(-1)=P(1)=P(3)$$

을 만족시킨다. $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어질 때, $P(0)$의 값을 구하시오.

최고차항의 계수가 2인 삼차식 $P(x)$에 대하여 $P(-1)=P(1)=P(3)=k$ (k는 상수)라 놓으면 $P(x)-k$는 $x+1$, $x-1$, $x-3$으로 모두 나누어떨어지므로

$$P(x)-k=2(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$\Rightarrow \quad P(x)=2(x+1)(x-1)(x-3)+k$$

이다. 이때, 인수정리에 의하여 $P(2)=0$이므로

$$P(2)=2\cdot3\cdot1\cdot(-1)+k=0 \quad \Rightarrow \quad k=6$$

이다. 따라서 $P(x)=2(x+1)(x-1)(x-3)+6$이고 구하는 값은 $P(0)=2\cdot1\cdot(-1)\cdot(-3)+6=12$이다.

답 12

093

모든 실수 x에 대하여 등식

$$4x^3+3x^2-5x+1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$$

가 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $ad-bc$의 값을 구하시오.

다항식 $4x^3+3x^2-5x+1$을 일차식 $x+1$로 반복하여 나누는 과정은 조립제법을 이용하면

-1	4	3	-5	1
		-4	1	4
-1	4	-1	-4	5
		-4	5	
-1	4	-5	1	
		-4		
	4	-9		

이므로

$$\begin{aligned}4x^3+3x^2-5x+1&=(x+1)(4x^2-x-4)+5\\&=(x+1)\{(x+1)(4x-5)+1\}+5\\&=(x+1)[(x+1)\{(x+1)\cdot4-9\}+1]+5\end{aligned}$$

이다. 전개하면

$$4x^3+3x^2-5x+1=4(x+1)^3-9(x+1)^2+(x+1)+5$$

이므로 $a=4$, $b=-9$, $c=1$, $d=5$이고 구하는 값은 $ad-bc=20+9=29$이다.

답 29

094

2018^3-1을 2017×2019로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 x^3-1을 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$x^3-1=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b \quad \cdots \text{㉠}$$

이 성립한다. [40%]

㉠에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$$a+b=0, \quad -a+b=-2$$

이고 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$이다. [40%]

이를 ㉠에 대입하면

$$x^3-1=(x-1)(x+1)Q(x)+x-1$$

이다. $x=2018$을 대입하면 $2018^3-1=2017\times2019\times Q(2018)+2017$이므로 구하는 나머지는 2017이다. [20%]

답 2017

095

모든 실수 x에 대하여 등식

$$(x+2)^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_6(x+1)^6$$

이 항상 성립할 때, $a_2+a_4+a_6$의 값을 구하시오.

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$1=a_0+0+0+0+0+0+0$$

이므로 $a_0=1$이다. [30%]

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$2^6=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \quad \cdots \text{㉠}$$

이고, ... [30%]

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$0=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6 \quad \cdots \text{㉡}$$

이다. [30%]

㉠+㉡을 하면

$$2^6=2(a_0+a_2+a_4+a_6)$$

이므로 $2^5=a_0+a_2+a_4+a_6$이고, 구하는 값은

$$a_2+a_4+a_6=2^5-1=31$$

이다. [10%]

답 31

03 인수분해

01 인수분해 공식

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
2. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
4. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
5. $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
6. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
7. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
8. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
9. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
10. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

02 복잡한 식의 인수분해

1. **치환**을 이용한 인수분해
 (1) 공통부분이 있는 경우: 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해
 (2) 공통부분이 없는 경우: 식을 변형하여 공통부분을 만든 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해
2. **복이차식**
 (1) $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.
 (2) 이차항을 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 만들어서 인수분해한다.
3. **여러 문자**를 포함한 식의 인수분해
 (1) 각 문자의 차수가 다른 경우: 차수가 가장 낮은 문자로 내림차순으로 정리 후 인수분해
 (2) 각 문자의 차수가 같은 경우: 임의의 한 문자로 내림차순으로 정리 후 인수분해
4. **인수정리**를 이용한 인수분해
 단계 1. 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이 되는 α의 값을 찾는다.
 단계 2. 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 만든다.
 단계 3. 다항식 $Q(x)$가 더 이상 인수분해 되지 않을 때까지 단계 1, 2를 계속한다.

마·타·노·트

▶ 인수분해
하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것

▶ 인수분해 범위
특별한 조건이 없으면 고등학교 과정에서는 다항식의 인수분해는 계수가 유리수인 범위에서 더 이상 인수분해 할 수 없을 때까지 한다.

▶ 다항식의 전개와 인수분해

$$(a+b)(a-b) \underset{\text{인수분해}}{\overset{\text{전개}}{\rightleftharpoons}} a^2-b^2$$

▶ $P(\alpha)=0$인 α를 찾는 방법
계수가 정수인 다항식 $P(x)$에서 $P(\alpha)=0$을 만족하는 α의 값은 일반적으로
$\pm\frac{\text{상수항의 양의 약수}}{\text{최고차항의 계수의 양의 약수}}$
중에서 찾는다.

개념 확인

정답 및 풀이 p.16

[096 ~ 106] 다음 식을 인수분해하시오.

096 $2x^2y-4xy^2$ $2xy(x-2y)$

답 $2xy(x-2y)$

097 $xy+3x-y-3$ $(x-1)(y+3)$

답 $(x-1)(y+3)$

098 $4x^2-4x+1$ $(2x-1)^2$

답 $(2x-1)^2$

099 x^2-169 $(x+13)(x-13)$

답 $(x+13)(x-13)$

100 $x^2-8x+12$ $(x-2)(x-6)$

답 $(x-2)(x-6)$

101 $3x^2+2x-1$ $(3x-1)(x+1)$

답 $(3x-1)(x+1)$

102 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$a^2+(-b)^2+c^2+2a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot c+2ca=(a-b+c)^2$

답 $(a-b+c)^2$

103 $x^3+9x^2+27x+27$ $(x+3)^3$

답 $(x+3)^3$

104 $8x^3-12x^2+6x-1$ $(2x-1)^3$

답 $(2x-1)^3$

105 $8x^3+1$ $(2x+1)(4x^2-2x+1)$

답 $(2x+1)(4x^2-2x+1)$

106 $27x^3-1$ $(3x-1)(9x^2+3x+1)$

답 $(3x-1)(9x^2+3x+1)$

[107 ~ 112] 다음 식을 인수분해하시오.

107 $(a+b)^2+3(a+b)-4$ $a+b=X$로 치환하면

$(a+b)^2+3(a+b)-4=X^2+3X-4=(X+4)(X-1)$이고 다시 X에 $a+b$를 대입하면 (주어진 식) $=(a+b+4)(a+b-1)$이다.

답 $(a+b+4)(a+b-1)$

108 x^4+2x^2-3 $x^2=X$로 치환하면

$x^4+2x^2-3=X^2+2X-3=(X-1)(X+3)$이고 다시 X에 x^2을 대입하면

(주어진 식) $=(x^2-1)(x^2+3)=(x-1)(x+1)(x^2+3)$이다.

답 $(x-1)(x+1)(x^2+3)$

109 x^4-7x^2+9 $-7x^2=-6x^2-x^2$으로 분리하여 인수분해하면

$x^4-7x^2+9=(x^4-6x^2+9)-x^2=(x^2-3)^2-x^2=(x^2-x-3)(x^2+x-3)$

답 $(x^2-x-3)(x^2+x-3)$

110 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$

공통부분이 나타나도록 순서를 바꾸면

$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-3=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3$

이고 $x^2+5x=X$로 치환하여 전개한 뒤 인수분해하면

$(X+4)(X+6)-3=X^2+10X+21=(X+3)(X+7)$

이다. 다시 $X=x^2+5x$를 대입하면

(주어진 식) $=(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$

답 $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$

111 $x^3+x^2y-xy-x$ 차수가 낮은 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+x^2y-xy-x=(x^2-x)y+x^3-x$

$=x(x-1)y+x(x-1)(x+1)=x(x-1)(y+x+1)=x(x-1)(x+y+1)$

답 $x(x-1)(x+y+1)$

112 x^3+2x^2-x-2 $P(x)=x^3+2x^2-x-2$이라 하면 $P(1)=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다. $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, 조립제법을 이용하면

1	1	2	−1	−2
		1	3	2
	1	3	2	0

에서 $Q(x)=x^2+3x+2$이므로

$P(x)=(x-1)Q(x)=(x-1)(x^2+3x+2)=(x-1)(x+1)(x+2)$

답 $(x-1)(x+1)(x+2)$

개념 적용

개념 01. 공식을 이용한 인수분해

1. 인수분해 공식을 바로 적용한다.
2. 인수분해 공식을 바로 적용할 수 없는 경우, 인수분해 공식을 적용할 수 있도록 식을 적절히 변형한다.

113

다음 중 다항식 $a^2(x-y)+a(xy-y^2)$의 인수인 것은?

① $x+y$ ② $a-y$ ③ $ax-y$

④ $ax+ay$ ⑤ $a+y$

다항식 $a^2(x-y)+a(xy-y^2)$을 공통부분으로 묶어 인수분해하면

$$a^2(x-y)+a(xy-y^2)=a^2(x-y)+a(x-y)y$$
$$=a(x-y)(a+y)$$

이므로 보기 중에서 다항식 $a^2(x-y)+a(xy-y^2)$의 인수는 ⑤ $a+y$이다.

답 ⑤

114 중요

x에 대한 다항식 $x^2-3ax+(2a+1)(a-1)$은 x의 계수가 1인 두 일차식으로 인수분해된다. 두 일차식의 합이 $2x-9$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

x에 대한 다항식 $x^2-3ax+(2a+1)(a-1)$을 인수분해하면

$$x^2-3ax+(2a+1)(a-1)=\{x-(2a+1)\}\{x-(a-1)\}$$

이므로 두 일차식을 합하면 $x-(2a+1)+x-(a-1)=2x-3a$이다. 즉, $-3a=-9$에서 구하는 상수 a의 값은 3이다.

답 ③

115 중요

다음 중 옳지 않은 것은?

① $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3=(2a-b)^3$

② $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

③ $64x^3-1=(4x-1)(16x^2-4x+1)$

④ $4a^2+b^2+c^2-4ab-2bc+4ca=(2a-b+c)^2$

⑤ $(x+y)^3-y^3=x(x^2+3xy+3y^2)$

③ 다항식 $64x^3-1$을 인수분해하면

$$64x^3-1=(4x-1)(16x^2+4x+1)$$

답 ③

116

다항식 a^6-b^6을 인수분해하시오.

다항식 a^6-b^6을 인수분해하면

$$(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$$

답 $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

117

두 실수 a, b에 대하여 $a^2+4b^2+8a-16b-4ab+16=0$일 때, 항상 옳은 것은?

① $a-2b+2=0$ ② $a-2b+4=0$ ③ $a-2b+6=0$

④ $a+2b-2=0$ ⑤ $a+2b-4=0$

$a^2+4b^2+8a-16b-4ab+16$을 인수분해하면

$$a^2+4b^2+8a-16b-4ab+16$$
$$=a^2+(-2b)^2+4^2+2\cdot a\cdot(-2b)+2\cdot(-2b)\cdot 4+2\cdot 4\cdot a$$
$$=(a-2b+4)^2$$

이다. 따라서 $(a-2b+4)^2=0$에서 $a-2b+4=0$이다.

답 ②

개념 02. 치환을 이용한 인수분해

1. 공통부분이 있는 경우: 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해
2. 공통부분이 없는 경우: 식을 변형하여 공통부분을 만든 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해
3. 복이차식: $x^2=X$로 치환하여 인수분해, 혹은 이차항을 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 만들어서 인수분해

118 중요

다항식 $(x^2-x-1)(x^2-x+3)-5$를 인수분해하면 $(x+1)(x+a)(x^2+bx+c)$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

공통부분을 $x^2-x=X$로 치환하여 인수분해하면

$$(x^2-x-1)(x^2-x+3)-5$$
$$=(X-1)(X+3)-5=X^2+2X-8$$
$$=(X-2)(X+4)=(x^2-x-2)(x^2-x+4)$$
$$=(x+1)(x-2)(x^2-x+4)$$

이므로 $a=-2$, $b=-1$, $c=4$이고 구하는 값은 $a+b+c=1$이다.

답 ①

119

다항식 $x(x+1)(x-2)(x-3)-40$을 인수분해하면?

① $(x+2)(x-4)(x^2-2x+5)$

② $(x+2)(x-4)(x^2+2x+5)$

③ $(x+2)(x+4)(x^2-2x+5)$

④ $(x-2)(x+4)(x^2+2x+5)$

⑤ $(x-2)(x+4)(x^2-2x+5)$

주어진 식에서 공통부분이 생기도록 항의 순서를 바꾸면

$$x(x+1)(x-2)(x-3)-40=\{x(x-2)\}\{(x+1)(x-3)\}-40$$
$$=(x^2-2x)(x^2-2x-3)-40$$

에서 $x^2-2x=X$로 치환하면

$$(x^2-2x)(x^2-2x-3)-40=X(X-3)-40=X^2-3X-40=(X-8)(X+5)$$

이고 X에 x^2-2x를 대입하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$(\text{주어진 식})=(x^2-2x-8)(x^2-2x+5)=(x+2)(x-4)(x^2-2x+5)$$

답 ①

120

다항식 x^4-3x^2-4를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+c)$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 5

④ 9 ⑤ 14

$x^2=X$로 치환하여 인수분해하면

$$x^4-3x^2-4=X^2-3X-4=(X-4)(X+1)$$

이다. 다시 $X=x^2$을 대입하면

$$(\text{주어진 식})=(x^2-4)(x^2+1)=(x+2)(x-2)(x^2+1)$$

이므로 $a=2$, $b=-2$, $c=1$ 또는 $a=-2$, $b=2$, $c=1$이고 구하는 값은 $a^2+b^2+c^2=9$이다.

답 ④

121 중요!

다항식 x^4-9x^2+16을 인수분해하면 $(x^2+ax-4)(x^2+x+b)$일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

주어진 다항식의 이차항을 $-9x^2=-8x^2-x^2$으로 분리하여 인수분해하면

$$x^4-9x^2+16=(x^4-8x^2+16)-x^2=(x^2-4)^2-x^2$$
$$=(x^2-x-4)(x^2+x-4)$$

이므로 $a=-1$, $b=-4$이다.

답 $a=-1$, $b=-4$

개념 03. 여러 문자를 포함한 식의 인수분해

1. 각 문자의 차수가 다른 경우: 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.
2. 각 문자의 차수가 같은 경우: 임의의 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

122 중요!

다항식 $2x^2-y^2+xy+3y-2$를 인수분해하시오.

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해하면

$$2x^2+yx-y^2+3y-2=2x^2+yx-(y^2-3y+2)$$
$$=2x^2+yx-(y-1)(y-2)$$
$$=(x+y-1)\{2x-(y-2)\}$$
$$=(x+y-1)(2x-y+2)$$

답 $(x+y-1)(2x-y+2)$

123

다항식 $x^2-xy-2y^2-3x-6y-4$를 인수분해하면 $(x+ay+b)(x+cy+1)$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해하면

$$x^2-(y+3)x-2y^2-6y-4=x^2-(y+3)x-2(y+2)(y+1)$$
$$=\{x-2(y+2)\}(x+y+1)$$
$$=(x-2y-4)(x+y+1)$$

이므로 $a=-2$, $b=-4$, $c=1$이고 구하는 값은 $abc=(-2)\cdot(-4)\cdot1=8$이다.

답 ④

124

다항식 $-(b+c)a^2+(a-c)b^2+(a-b)c^2+2abc$를 인수분해하면?

① $(a+b)(b+c)(c-a)$ ② $(a-b)(b+c)(c-a)$

③ $(a-b)(b-c)(c-a)$ ④ $(a-b)(b+c)(c+a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

주어진 다항식을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해하면

$$-(b+c)a^2+(a-c)b^2+(a-b)c^2+2abc$$
$$=-(b+c)a^2+ab^2-b^2c+ac^2-bc^2+2abc$$
$$=-(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a-b^2c-bc^2$$
$$=-(b+c)a^2+(b+c)^2a-bc(b+c)$$
$$=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=-(b+c)(a-b)(a-c)$$

이고 식을 정리하면 $(a-b)(b+c)(c-a)$이다.

답 ②

125

다항식 $x^3+(3y+2)x^2+3(2y-1)x-9y$를 인수분해하시오.

주어진 식을 전개한 후 차수가 가장 낮은 y에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해하면

$$\begin{aligned}&x^3+(3y+2)x^2+3(2y-1)x-9y\\&=y(3x^2+6x-9)+(x^3+2x^2-3x)\\&=3y(x^2+2x-3)+x(x^2+2x-3)\\&=(x^2+2x-3)(3y+x)=(x-1)(x+3)(3y+x)\end{aligned}$$

이고 식을 정리하면 $(x-1)(x+3)(x+3y)$이다.

답 $(x-1)(x+3)(x+3y)$

개념 04. 인수정리를 이용한 인수분해

1. 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이 되는 α의 값을 찾는다.
2. 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 만든다.
3. 다항식 $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 **1**, **2**를 계속한다.

126

다항식 $P(x)=x^3+ax^2-ax-6$이 $x-2$로 나누어떨어질 때, 다음 중 다항식 $P(x)$의 인수는?

① x^2-x+3 ② x^2-2x+3 ③ x^2+x+3
④ x^2+2x+3 ⑤ x^2+3x+3

$P(2)=8+4a-2a-6=0$에서 $a=-1$이므로 $P(x)=x^3-x^2+x-6$이다. $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, 조립제법을 이용하면

2	1	−1	1	−6
		2	2	6
	1	1	3	0

에서 $Q(x)=x^2+x+3$이므로 $P(x)=(x-2)Q(x)=(x-2)(x^2+x+3)$이다.
따라서 다항식 $P(x)$의 인수는 ③ x^2+x+3이다.

답 ③

127 중요!

x에 대한 다항식 $2x^3+3x^2-11x+a$가 $(x-2)(x+b)(2x+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 41 ② 44 ③ 46
④ 49 ⑤ 50

주어진 다항식을 $P(x)=2x^3+3x^2-11x+a$라 하자. $x-2$가 $P(x)$의 인수이므로 $P(2)=6+a=0$에서 $a=-6$이다. 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, 조립제법을 이용하면

2	2	3	−11	−6
		4	14	6
	2	7	3	0

에서 $Q(x)=2x^2+7x+3$이므로

$$P(x)=(x-2)Q(x)=(x-2)(2x^2+7x+3)=(x-2)(x+3)(2x+1)$$

이다. 따라서 $a=-6$, $b=3$, $c=1$이고 구하는 값은

$$a^2+b^2+c^2=(-6)^2+3^2+1=46$$

답 ③

128

다항식 $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$을 인수분해하시오.

$P(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$이라 하면 $P(1)=1+5+5-5-6=0$이고, $P(-1)=1-5+5+5-6=0$이므로 $x-1$과 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다. $P(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, 조립제법을 이용하면

1	1	5	5	−5	−6
		1	6	11	6
−1	1	6	11	6	0
		−1	−5	−6	
	1	5	6	0	

에서 $Q(x)=x^2+5x+6$이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x+1)Q(x)=(x-1)(x+1)(x^2+5x+6)\\&=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)\end{aligned}$$

답 $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

129

다항식 x^4-3x^2-2x가 $(x-\alpha)^2P(x)$로 인수분해될 때, $P(-3)$의 값을 구하시오. (단, α는 실수이다.)

다항식 x^4-3x^2-2x를 공통부분 x로 묶어서 인수분해하면

$$x^4-3x^2-2x=x(x^3-3x-2)$$

이다. $f(x)=x^3-3x-2$라 하면 $f(-1)=-1+3-2=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 가진다. $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$라 할 때, 조립제법을 이용하면

−1	1	0	−3	−2
		−1	1	2
	1	−1	−2	0

에서 $g(x)=x^2-x-2$이므로

$$f(x)=(x+1)g(x)=(x+1)(x^2-x-2)=(x-2)(x+1)^2$$

이고 $x^4-3x^2-2x=x(x-2)(x+1)^2=(x-\alpha)^2P(x)$에서
$\alpha=-1$, $P(x)=x(x-2)$이다. 따라서 구하는 값은 $P(-3)=-3\cdot(-5)=15$이다.

답 15

130

x에 대한 사차식 $x^4+ax^3+bx^2-2x-4$가

$$(x-1)(x+1)(x^2+cx+d)$$

로 인수분해될 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 a, b, c, d의 값을 각각 구하시오.

$P(x)=x^4+ax^3+bx^2-2x-4$라 할 때, $P(x)$는 $x-1$과 $x+1$을 인수로 가지므로 $P(1)=P(-1)=0$이다. 즉,

$$P(1)=1+a+b-2-4=0 \Rightarrow a+b=5 \quad \cdots ㉠$$

$$P(-1)=1-a+b+2-4=0 \Rightarrow -a+b=1 \quad \cdots ㉡$$

에서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$이므로 $P(x)=x^4+2x^3+3x^2-2x-4$이다. 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	2	3	−2	−4
		1	3	6	4
−1	1	3	6	4	0
		−1	−2	−4	
	1	2	4	0	

이므로 $P(x)$는 $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x+4)$이고 $c=2$, $d=4$이다.

답 $a=2$, $b=3$, $c=2$, $d=4$

개념 05. 인수분해의 응용 - 식의 값 또는 수의 계산

1. 식의 값: 복잡한 식을 인수분해한 후 주어진 조건을 식에 대입한다.
2. 수: 수의 계산이 복잡한 경우 수를 문자로 치환하여 식을 인수분해한 후 수를 대입한다.

131

$x=\sqrt{3}+1$, $y=\sqrt{3}-1$일 때, $x^4y+x^3y^2-x^2y^3-xy^4$의 값을 구하시오.

주어진 식을 공통부분으로 묶어 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^4y+x^3y^2-x^2y^3-xy^4&=xy(x^3+x^2y-xy^2-y^3)\\&=xy\{x^2(x+y)-y^2(x+y)\}\\&=xy(x+y)(x^2-y^2)\\&=xy(x+y)^2(x-y)\end{aligned}$$

이다. 이때 $x+y=2\sqrt{3}$, $xy=2$, $x-y=2$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$xy(x+y)^2(x-y)=2\times(2\sqrt{3})^2\times2=48$$

이므로 구하는 값은 48이다.

답 48

132

$P(x)=x^3-2x^2-4x+8$일 때, $P(2.1)$의 값은?

① 0.039 ② 0.041 ③ 0.043

④ 0.045 ⑤ 0.047

$P(x)=x^3-2x^2-4x+8$에서 $P(2)=0$이므로 $P(x)$는 $x-2$를 인수로 가진다. 조립제법을 이용하면

2	1	−2	−4	8
		2	0	−8
	1	0	−4	0

에서 $P(x)=(x-2)(x^2-4)=(x-2)^2(x+2)$이므로 구하는 값은

$$P(2.1)=(2.1-2)^2\cdot(2.1+2)=(0.1)^2\cdot(4.1)=0.041$$

답 ②

133

$\dfrac{102^3-98^3}{102^2+102\cdot98+98^2}$의 값을 구하시오.

$102=a$, $98=b$로 치환하고 인수분해하면

$$\frac{102^3-98^3}{102^2+102\cdot98+98^2}=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=a-b$$

이다. 따라서 구하는 값은 $a-b=102-98=4$이다.

답 4

134 중요!

$\sqrt{20\cdot22\cdot23\cdot25+9}$의 값을 구하시오.

$20=x$라 치환한 뒤 주어진 식에 공통부분이 나타나도록 순서를 바꾸면

$$\begin{aligned}\sqrt{x(x+2)(x+3)(x+5)+9}&=\sqrt{x(x+5)(x+2)(x+3)+9}\\&=\sqrt{(x^2+5x)(x^2+5x+6)+9}\end{aligned}$$

이다. $x^2+5x=X$로 치환하면

$$\begin{aligned}\sqrt{(x^2+5x)(x^2+5x+6)+9}&=\sqrt{X(X+6)+9}\\&=\sqrt{X^2+6X+9}=\sqrt{(X+3)^2}=|X+3|\end{aligned}$$

이고 $X+3=x^2+5x+3=503>0$이므로 $\sqrt{20\cdot22\cdot23\cdot25+9}=503$이다.

답 503

개념 06. 인수분해의 응용 - 삼각형의 모양

삼각형의 세 변의 길이가 각각 a, b, c일 때,

1. $a=b$이면 이등변삼각형
2. $a=b=c$이면 정삼각형
3. $a^2+b^2=c^2$이면 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

135 중요!

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 등식

$$a^3+ca^2-(b^2-c^2)a-b^2c+c^3=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

등식의 좌변을 차수가 가장 낮은 문자 b에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해하면

$$\begin{aligned}&a^3+ca^2-(b^2-c^2)a-b^2c+c^3\\&=a^3+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c+c^3\\&=-(a+c)b^2+a^3+a^2c+ac^2+c^3\\&=-(a+c)b^2+(a+c)a^2+(a+c)c^2\\&=(a+c)(a^2-b^2+c^2)=0\end{aligned}$$

이다. 이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+c>0$이고 $a^2-b^2+c^2=0$이다. 따라서 $a^2+c^2=b^2$이므로 구하는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

136

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 등식

$$a^2b-a^2c+ab^2-ac^2+b^2c-bc^2=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

등식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해하면

$$\begin{aligned}&a^2b-a^2c+ab^2-ac^2+b^2c-bc^2\\&=(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\&=(b-c)a^2+(b-c)(b+c)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a+b)(a+c)=(a+b)(b-c)(c+a)=0\end{aligned}$$

이다. 이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b>0$, $c+a>0$이고 $b=c$일 때 등식이 성립한다. 따라서 구하는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 $b=c$인 이등변삼각형

137

다음 중 x^7-64x의 인수가 아닌 것은?

① x ② $x-2$ ③ $x+2$

④ x^2-2x+4 ⑤ x^2+2x-4

다항식 x^7-64x를 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^7-64x&=x(x^6-64)=x(x^6-2^6)\\&=x(x^3-2^3)(x^3+2^3)\\&=x(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)\\&=x(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)\end{aligned}$$

이므로 ⑤ x^2+2x-4는 주어진 다항식의 인수가 아니다.

답 ⑤

138

두 다항식 A, B가 $A=2x^2-x-4$, $B=x^2-x-3$일 때,

$$A^3-6A^2B+12AB^2-8B^3=ax^3+bx^2+cx+d$$

를 만족시키는 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $bc-ad$의 값은?

① 64 ② 66 ③ 68

④ 70 ⑤ 72

두 다항식 A, B에 대한 다항식을 인수분해하면

$$A^3-6A^2B+12AB^2-8B^3=(A-2B)^3$$

이다. 이 등식의 우변에 $A=2x^2-x-4$, $B=x^2-x-3$을 대입하여 전개하면

$$\begin{aligned}(A-2B)^3&=\{(2x^2-x-4)-2(x^2-x-3)\}^3\\&=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8\end{aligned}$$

이므로 $a=1$, $b=6$, $c=12$, $d=8$이고 구하는 값은 $bc-ad=6\cdot12-1\cdot8=64$이다.

답 ①

139

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이

$$a^2b+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c-bc^2=0$$

을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

주어진 식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해하면

$$\begin{aligned}&a^2b+a^2c-ab^2+ac^2-b^2c-bc^2\\&=(b+c)a^2-(b^2-c^2)a-bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\}\\&=(b+c)(a-b)(a+c)=0\end{aligned}$$

이다. 이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $b+c>0$, $a+c>0$이고 $a=b$일 때, 등식이 성립한다. 따라서 구하는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 $a=b$인 이등변삼각형

140

다항식 $x^2+xy-2y^2+ax+12y-18$이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(단, 두 일차식의 계수는 정수이다.)

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+xy-2y^2+ax+12y-18\\&=x^2+(y+a)x-2(y^2-6y+9)\\&=x^2+(y+a)x-2(y-3)^2\end{aligned}$$

이다. 이 식이 x, y에 대한 두 일차식으로 인수분해되므로 x에 대한 이차식의 상수항 $-2(y-3)^2$으로부터

$$\begin{aligned}-2(y-3)^2&=\{-2(y-3)\}\times(y-3) &&\cdots\ ㉠\\&=\{2(y-3)\}\times\{-(y-3)\} &&\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

과 같이 y에 대한 두 일차식의 곱으로 나타낼 수 있다. 이때, y에 대한 두 일차식의 합이 $y+a$가 되는 경우는 ㉡이므로

$$y+a=\{2(y-3)\}+\{-(y-3)\}$$

에서 $a=-3$이다.

답 -3

서술형

141

다항식 $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)+k$가 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k의 값을 구하시오.

주어진 식을 공통부분이 나타나도록 순서를 바꾸면

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)+k$$
$$=(x-1)(x+5)(x+1)(x+3)+k$$
$$=(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)+k$$

이다. $x^2+4x=X$로 치환하면

$$(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)+k$$
$$=(X-5)(X+3)+k$$
$$=X^2-2X+k-15=(X-1)^2+k-16$$

이므로 주어진 식이 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되면 $k-16=0$이다. 따라서 구하는 값은 $k=16$이다.

답 16

142

다항식 $P(x)=x^4-19x^3+89x^2+19x-90$에 대하여 $P(11)$의 값을 구하시오.

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(1)=0$, $P(-1)=0$이므로 $x-1$과 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다. $P(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, 조립제법을 이용하면

1	1	−19	89	19	−90
		1	−18	71	90
−1	1	−18	71	90	0
		−1	19	−90	
	1	−19	90	0	

에서 $Q(x)=x^2-19x+90$이므로

$$P(x)=(x-1)(x+1)Q(x)$$
$$=(x-1)(x+1)(x^2-19x+90)$$
$$=(x-1)(x+1)(x-9)(x-10)$$

이다. 따라서 구하는 값은 $P(11)=10\cdot12\cdot2\cdot1=240$이다.

답 240

143

$x=3-\sqrt{5}$, $y=3+\sqrt{5}$일 때,

$$x^3y+2x^2y^2+xy^3-4x^2y-4xy^2+4xy$$

의 값을 구하시오.

주어진 다항식에서 공통부분을 묶어 인수분해하면

$$x^3y+2x^2y^2+xy^3-4x^2y-4xy^2+4xy$$
$$=xy(x^2+2xy+y^2-4x-4y+4)$$
$$=xy(x^2+y^2+2^2+2xy-4y-4x)$$
$$=xy(x+y-2)^2 \quad \cdots ㉠$$

이다. [60%]

이때 $x+y$, xy의 값은 각각

$$x+y=(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=6$$
$$xy=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=4$$

이므로 [20%]

㉠에 대입하면 구하는 값은

$$xy(x+y-2)^2=4\cdot(6-2)^2=64$$

이다. [20%]

답 64

144

다항식 $P(x)=x^3-5x^2+ax+b$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 6이고 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -24일 때, 다항식 $P(x)$를 인수분해하시오. (단, a, b는 상수이다.)

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로 $P(1)=1-5+a+b=6$에서 $a+b=10$이고 [20%]

다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -24이므로 $P(-2)=-8-20-2a+b=-24$에서 $2a-b=-4$이다. [20%]

따라서 a, b에 대한 두 식

$$a+b=10, \quad 2a-b=-4$$

를 연립하여 풀면 $a=2$, $b=8$이다. [20%]

따라서 $P(x)=x^3-5x^2+2x+8$이고 $P(2)=8-20+4+8=0$이므로 $x-2$는 $P(x)$의 인수이다. $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, 조립제법을 이용하면

2	1	−5	2	8
		2	−6	−8
	1	−3	−4	0

에서 $Q(x)=x^2-3x-4$이므로

$$P(x)=(x-2)Q(x)=(x-2)(x^2-3x-4)=(x+1)(x-2)(x-4)$$

이다. [40%]

답 $(x+1)(x-2)(x-4)$

04 복소수

01 복소수의 뜻과 연산

1. 복소수: 두 실수 a, b와 허수단위 i에 대하여

(1) 복소수: $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수

$$\underset{\text{실수부분}}{a} + \underset{\text{허수부분}}{bi}$$

(2) 켤레복소수: 복소수 $a+bi$에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $\overline{a+bi}=a-bi$

2. 복소수가 서로 같을 조건: 실수 a, b, c, d에 대하여

(1) $a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d$

(2) $a+bi=0 \iff a=0,\ b=0$

3. 복소수의 연산: 실수 a, b, c, d와 허수단위 i에 대하여

(1) 복소수의 덧셈: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) 복소수의 뺄셈: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) 복소수의 곱셈: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) 복소수의 나눗셈: $(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

4. 음수의 제곱근: $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$이고, $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

02 복소수의 성질

1. 복소수의 연산에 대한 성질: 임의의 세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

(1) 교환법칙: $z_1+z_2=z_2+z_1$, $\quad z_1z_2=z_2z_1$

(2) 결합법칙: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $\quad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$

(3) 분배법칙: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$, $\quad (z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$

2. 제곱근의 곱셈과 나눗셈: 실수 a, b에 대하여

(1) $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.

(2) $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.

3. 켤레복소수의 성질

a, b가 실수, 복소수 $z=a+bi$이고, 그 켤레복소수는 $\overline{z}$라 하면 다음 식이 성립한다.

(단, z_1, z_2와 그 각각의 켤레복소수는 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$이다.)

(1) $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

(2) $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

(3) $\overline{\overline{z}}=z$

(4) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

(5) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(6) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

4. 허수단위 i의 거듭제곱

n이 음이 아닌 정수일 때, 허수단위 i의 거듭제곱은 다음과 같이 반복된다.

$$i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i,\quad i^{4n+4}=1$$

마·타·노·트

▶ 허수단위

허수단위 i는 제곱하여 -1이 되는 수이므로 $i=\sqrt{-1}$로 나타내기도 한다.

▶ 켤레복소수

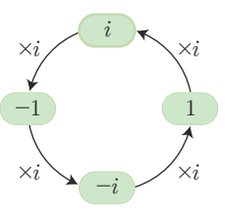
복소수 z의 켤레복소수는 $\overline{z}$로 나타낸다.

▶ 복소수가 실수, 허수, 순허수가 되기 위한 조건

복소수 $a+bi$에서

1. **실수** $b=0$인 복소수
2. **허수** $b\neq0$인 복소수
3. **순허수** $a=0$, $b\neq0$인 복소수

▶ 허수단위 i의 거듭제곱



정답 및 풀이 p.22

145 **[보기]**의 수를 실수, 허수 또는 순허수로 구분하시오.

[보기]

ㄱ. i	ㄴ. $2-\sqrt{3}$	ㄷ. 0
ㄹ. $\sqrt{3}i^2$	ㅁ. $3+\sqrt{-5}$	ㅂ. $4+5i$
ㅅ. $7+\sqrt{2}$	ㅇ. $3+i^2$	ㅈ. $\sqrt{-3}$

답 실수: ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅅ, ㅇ 허수: ㄱ, ㅁ, ㅂ, ㅈ 순허수: ㄱ, ㅈ

[146 ~ 147] 다음 수를 허수단위 i를 사용하여 나타내시오.

146 $-\sqrt{-32}$ $-\sqrt{-32}=-\sqrt{32}i=-4\sqrt{2}i$

답 $-4\sqrt{2}i$

147 $\sqrt{-20}$ $\sqrt{-20}=\sqrt{20}i=2\sqrt{5}i$

답 $2\sqrt{5}i$

[148 ~ 149] 다음 수의 제곱근을 구하시오.

148 -12 $\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}i=\pm2\sqrt{3}i$

답 $\pm2\sqrt{3}i$

149 -49 $\pm\sqrt{-49}=\pm\sqrt{49}i=\pm7i$

답 $\pm7i$

[150 ~ 151] 다음 등식을 만족시키는 실수 a, b의 값을 각각 구하시오.

150 $a+bi=6+4i$ 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=6$, $b=4$이다.

답 $a=6$, $b=4$

151 $a+(b-2)i=2i$ 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0$, $b-2=2$이므로 $a=0$, $b=4$이다.

답 $a=0$, $b=4$

[152 ~ 153] 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

152 $2+3i$ $\overline{2+3i}=2-3i$

답 $2-3i$

153 $\sqrt{2}i$ $\overline{\sqrt{2}i}=-\sqrt{2}i$

답 $-\sqrt{2}i$

[154 ~ 158] 다음 식을 간단히 하시오.

154 $(3+4i)+(2-2i)$

$(3+4i)+(2-2i)=(3+2)+(4-2)i=5+2i$

답 $5+2i$

155 $(4-2i)(2+3i)$

$(4-2i)(2+3i)=8+12i-4i-6i^2=(8+6)+(12-4)i=14+8i$

답 $14+8i$

156 $\dfrac{6-2i}{1-i}$

$\dfrac{6-2i}{1-i}=\dfrac{(6-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{6+6i-2i-2i^2}{1-i^2}=\dfrac{(6+2)+(6-2)i}{2}=4+2i$

답 $4+2i$

157 i^{25} $i^{25}=(i^4)^6\cdot i=i$

답 i

158 $(1-i)^7$

$(1-i)^7=\{(1-i)^2\}^3\cdot(1-i)=(-2i)^3\cdot(1-i)=-8i^3(1-i)$

$=8i(1-i)=8i-8i^2=8+8i$

답 $8+8i$

[159 ~ 160] 다음 식의 값을 구하시오.

159 $\sqrt{-5}\sqrt{-3}$ $-5<0$, $-3<0$이므로 $\sqrt{-5}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-5)\cdot(-3)}=-\sqrt{15}$

답 $-\sqrt{15}$

160 $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}$ $16>0$, $-4<0$이므로 $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\dfrac{16}{-4}}=-\sqrt{-4}=-2i$

답 $-2i$

개념 적용

개념 01. 복소수의 정의와 사칙연산

1. 복소수: 두 실수 a, b와 허수단위 i에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타낸 수
2. 복소수의 연산: i를 문자와 같이 생각하여 연산 (단, $i^2=-1$)
3. 켤레복소수: 복소수 $z=a+bi$에 대하여 $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

161 중요

다음 중 옳은 것은?

① $3+4i$는 $1-4i$보다 크다.

② $\sqrt{2}$는 복소수가 아니다.

③ $2+\sqrt{2}-3i$의 실수부분은 $2+\sqrt{2}$, 허수부분은 $-3i$이다.

④ $b\neq0$이면 $a+bi$는 허수이다.

⑤ 허수는 복소수이다.

① 허수에서는 대소 관계가 존재하지 않는다.
② $\sqrt{2}$는 실수이므로 복소수이다.
③ $2+\sqrt{2}-3i$의 실수부분은 $2+\sqrt{2}$, 허수부분은 -3이다.
④ $a=1$, $b=i$이면 $a+bi=1-1=0$은 실수이다.
⑤ 허수는 복소수에 포함된다.

답 ⑤

162

[보기]에서 실수의 개수를 a, 순허수의 개수를 b라 할 때, $a-b$의 값을 구하시오.

[보기]

$4i$, $\sqrt{5}$, 4π, $4-\sqrt{3}$, i^2
$2+5i$, $\sqrt{2}i$, $\sqrt{3}i-1$, $4+\pi$

실수는 $\sqrt{5}$, 4π, $4-\sqrt{3}$, $i^2=-1$, $4+\pi$의 5개이고, 순허수는 $4i$, $\sqrt{2}i$의 2개이므로 $a=5$, $b=2$이다. 따라서 $a-b=3$이다.

답 3

163

두 복소수 $z_1=2-i$, $z_2=5+2i$에 대하여 z_1+z_2의 실수부분을 a, z_1z_2의 허수부분을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

두 복소수의 합과 곱을 각각 계산하면

$$z_1+z_2=(2-i)+(5+2i)=(2+5)+(-1+2)i=7+i$$

$$z_1z_2=(2-i)(5+2i)=10+4i-5i+2=12-i$$

이므로 $a=7$, $b=-1$이다. 따라서 $a+b=6$이다.

답 6

164

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+i}+\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}+(4-i)(2+3i)$의 값을 구하시오.

주어진 식에서

$$\frac{1}{\sqrt{2}+i}+\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}=\frac{\sqrt{2}-i+\sqrt{2}i(\sqrt{2}+i)}{(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)}=\frac{\sqrt{2}-i+2i+\sqrt{2}i^2}{2-i^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-i+2i-\sqrt{2}}{2+1}=\frac{i}{3}$$

$$(4-i)(2+3i)=8+12i-2i-3i^2=11+10i$$

이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+i}+\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}+(4-i)(2+3i)=\frac{i}{3}+11+10i=11+\frac{31}{3}i$$

답 $11+\dfrac{31}{3}i$

개념 02. 복소수가 실수 또는 순허수일 조건

0이 아닌 복소수 $z=a+bi$에 대하여

1. z가 실수 $\iff$ $b=0$ $\iff$ $\overline{z}=z$
2. z가 순허수 $\iff$ $a=0$ $\iff$ $\overline{z}=-z$, $z^2<0$

165

복소수 $z=x^2+xi-5i-4$가 실수일 때, 실수 x의 값과 그때의 z의 값을 각각 구하시오.

복소수 $z=(x^2-4)+(x-5)i$가 실수이면 허수부분이 0이므로 $x-5=0$에서 $x=5$이다. 이때, $z=5^2-4=21$이다.

답 $x=5$, $z=21$

166 중요

복소수 $(x^2-5x+4)+(3x-3)i$가 순허수일 때, 실수 x의 값을 구하시오.

주어진 복소수가 순허수이면 허수부분이 0이 아니고, 실수부분은 0이어야 한다. 즉,

$$x^2-5x+4=0,\quad 3x-3=0$$

을 만족한다. $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$이다. 그런데 $3x-3=3(x-1)\neq0$에서 $x\neq1$이다. 따라서 주어진 복소수가 순허수일 때, x의 값은 4이다.

답 4

개념 03. 복소수가 서로 같을 조건

실수 a, b, c, d에 대하여

1. $a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d$
2. $a+bi=0 \iff a=0,\ b=0$

167 중요

두 실수 x, y가 $x(2+i)+y(3-2i)=9+i$를 만족시킬 때, $x-y$의 값을 구하시오.

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$(2x+3y)+(x-2y)i=9+i$$

이다. 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+3y=9,\quad x-2y=1$$

이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$이다. 따라서 $x-y=2$이다.

답 2

168

두 실수 x, y가 $x^2-y^2i-3x+yi+2+2i=0$을 만족시킬 때, xy의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$(x^2-3x+2)-(y^2-y-2)i=0$$

이다. 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0,\quad y^2-y-2=(y+1)(y-2)=0$$

이므로 $x=1$ 또는 $x=2$이고, $y=-1$ 또는 $y=2$이다. 따라서 xy는 $x=2$, $y=2$일 때 최댓값 4를 가진다.

답 ⑤

169

두 실수 x, y가 $\dfrac{x}{2+3i}+\dfrac{y}{2-3i}=6-3i$를 만족시킬 때, $2x+y$의 값은?

① 13 ② 26 ③ 39
④ 52 ⑤ 65

좌변의 분모에 각각 켤레복소수를 곱하여 정리하면

$$\frac{x(2-3i)+y(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{(2x+2y)-(3x-3y)i}{13}=6-3i$$

에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+2y=78,\quad 3x-3y=39$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $x=26$, $y=13$이므로 $2x+y=65$이다.

답 ⑤

개념 04. 켤레복소수의 정의와 성질

임의의 두 복소수 z_1, z_2에 대하여

1. $\overline{\overline{z}}=z$, 2. $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$ 3. $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

170

두 실수 a, b에 대하여 두 복소수

$$z_1=a+(a+b)i,\quad z_2=b+(a+6)i$$

가 있다. $\overline{z_1}$와 z_2가 서로 같은 복소수일 때, ab의 값을 구하시오. (단, $\overline{z_1}$은 z_1의 켤레복소수이다.)

$\overline{z_1}=a-(a+b)i$에서 $\overline{z_1}$와 z_2가 서로 같은 복소수이므로

$$\overline{z_1}=z_2 \Rightarrow a-(a+b)i=b+(a+6)i$$

에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=b,\quad -a-b=a+6$$

이다. 이때 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-2$이므로 $ab=4$이다.

답 4

171

두 복소수 $\alpha=1+2i$, $\beta=4-3i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

주어진 식을 정리하면

$$\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$$

이다. $\alpha+\beta=5-i$, $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=5+i$이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=(5-i)(5+i)=26$$

답 26

172 중요

$(1-i)\overline{z}=5+i$를 만족시키는 복소수 z의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

복소수의 나눗셈에 의하여

$$\overline{z}=\frac{5+i}{1-i}=\frac{(5+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+6i}{2}=2+3i$$

이다. 따라서 켤레복소수의 성질에 의하여 복소수 z는 다음과 같다.

$$z=\overline{(\overline{z})}=\overline{2+3i}=2-3i$$

답 $2-3i$

개념유형 05. 복소수가 주어질 때의 식의 값

1. $z_1=a+bi$, $z_2=a-bi$가 주어진 경우 합과 곱을 이용
2. $z=a+bi$를 $z-a=bi$로 변형한 후 양변을 제곱하여 정리한 이차방정식을 이용

173 중요

두 복소수 $x=2+\sqrt{2}i$, $y=2-\sqrt{2}i$에 대하여 x^3+y^3의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

$x+y$와 xy의 값을 각각 구하면

$$x+y=(2+\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)=4,\quad xy=(2+\sqrt{2}i)(2-\sqrt{2}i)=4-2i^2=6$$

이다. 곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot6\cdot4=-8$$

답 ①

174

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha^2=-4i$, $\beta^2=-8i$일 때, $\overline{\alpha\beta}$의 값을 모두 구하시오. (단, $\overline{\alpha\beta}$는 $\alpha\beta$의 켤레복소수이다.)

켤레복소수의 정의에 의하여

$$\alpha^2=-4i,\ \beta^2=-8i \quRightarrow\quad \overline{\alpha^2}=4i,\ \overline{\beta^2}=8i$$

이고 켤레복소수의 연산 법칙에 의하여

$$(\overline{\alpha\beta})^2=\overline{\alpha\beta}\cdot\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha\beta\alpha\beta}=\overline{\alpha^2\beta^2}=\overline{\alpha^2}\cdot\overline{\beta^2}=32i^2=-32$$

이다. 따라서 구하는 값은 $\overline{\alpha\beta}=\pm\sqrt{-32}=\pm4\sqrt{2}i$이다.

답 $\pm4\sqrt{2}i$

175

$x=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$일 때, x^2-x+4의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

$x=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$에서 $2x-1=-\sqrt{7}i$이므로 양변을 제곱하면

$$4x^2-4x+1=-7 \quRightarrow\quad x^2-x=-2$$

이다. 따라서 구하는 값은 $x^2-x+4=-2+4=2$이다.

답 ⑤

176 중요

$x=3-i$일 때, $x^4-6x^3+11x^2-6x+8$의 값을 구하시오.

$x=3-i$에서 $x-3=-i$이므로 양변을 제곱하면

$$x^2-6x+9=-1 \quRightarrow\quad x^2-6x+10=0$$

이다. 따라서 주어진 식의 값을 구하면

$$\begin{aligned}x^4-6x^3+11x^2-6x+8&=x^2(x^2-6x+10)+x^2-6x+8\\&=(x^2-6x+10)-2\\&=-2\end{aligned}$$

에서 -2이다.

답 -2

개념유형 06. 음수의 제곱근

$a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$이고, $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

1. $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.
2. $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다. (단, $b\neq0$)

177 중요

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $\sqrt{-2}\sqrt{7}=-\sqrt{-14}$ ㄴ. $\sqrt{-5}\sqrt{-3}=\sqrt{15}$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-7}}=-\sqrt{-\dfrac{5}{7}}$ ㄹ. $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄷ, ㄹ

ㄱ. (거짓) $\sqrt{-2}\sqrt{7}=\sqrt{2}i\sqrt{7}=\sqrt{14}i=\sqrt{-14}$

ㄴ. (거짓) $\sqrt{-5}\sqrt{-3}=\sqrt{5}i\sqrt{3}i=\sqrt{15}i^2=-\sqrt{15}$

ㄷ. (참) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}i}=-\dfrac{\sqrt{5}i}{\sqrt{7}}=-\sqrt{\dfrac{5}{7}}i=-\sqrt{-\dfrac{5}{7}}$

ㄹ. (거짓) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}i}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

답 ②

178

$\sqrt{-3}\sqrt{-27}+(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})+\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$의 값을 구하시오.

제곱근의 곱셈과 나눗셈에 의하여 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\sqrt{-3}\sqrt{-27}+(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}\\&=-\sqrt{(-3)\cdot(-27)}+(2+\sqrt{5}i)(2-\sqrt{5}i)-\sqrt{\frac{8}{-2}}\\&=-9+(4-5i^2)-2i=-9+4+5-2i=-2i\end{aligned}$$

답 $-2i$

179

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$일 때, 다음 중 $\sqrt{-a}\sqrt{b}$와 같은 것은?

① $\sqrt{ab}$ ② $\sqrt{-ab}$ ③ $-\sqrt{-ab}$
④ $-\sqrt{ab}$ ⑤ $\sqrt{a}\sqrt{b}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$이다. 따라서 $-a<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$

답 ③

180

0이 아닌 네 실수 a, b, c, d에 대하여

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}=-\sqrt{\frac{c}{d}}$$

일 때, $\sqrt{(a+d)^2}-|b-c|$를 간단히 하시오.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$이고, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}=-\sqrt{\frac{c}{d}}$에서 $c>0$, $d<0$이다. 따라서 $a+d<0$, $b-c<0$이므로 주어진 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+d)^2}-|b-c|&=|a+d|-|b-c|\\&=(-a-d)-(-b+c)=-a+b-c-d\end{aligned}$$

답 $-a+b-c-d$

개념원 07. 허수단위 i의 거듭제곱

n이 음이 아닌 정수일 때,

$$i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i,\quad i^{4n+4}=1$$

181 중요!

$i+2i^2+3i^3+\cdots+200i^{200}$을 간단히 하시오.

복소수의 거듭제곱을 이용하면 주어진 식을 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

$$\begin{aligned}&i+2i^2+3i^3+\cdots+200i^{200}\\&=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)\\&\quad+\cdots+(197i^{197}+198i^{198}+199i^{199}+200i^{200})\\&=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)\\&\quad+\cdots+(197i-198-199i+200)\\&=\underbrace{(2-2i)+\cdots+(2-2i)}_{50개}=50(2-2i)=100-100i\end{aligned}$$

답 $100-100i$

182

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{2018}$을 간단히 하시오.

복소수의 거듭제곱을 이용하면 주어진 식을 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

$$\begin{aligned}&i+i^2+i^3+\cdots+i^{2018}\\&=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)\\&\quad+\cdots+(i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016})+i^{2017}+i^{2018}\\&=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1\\&=\underbrace{0+\cdots+0}_{504개}+i-1=-1+i\end{aligned}$$

답 $-1+i$

개념원 08. 복소수의 거듭제곱

1. $\frac{1+i}{1-i}=i,\quad \frac{1-i}{1+i}=-i$
2. $(1+i)^2=2i,\quad (1-i)^2=-2i$
3. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i,\quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$

183 중요!

복소수 $z=\frac{2+2i}{\sqrt{2}}$일 때, z^n이 양의 실수가 되는 자연수 n의 최솟값과 그때의 z^n의 값을 각각 구하시오.

$z=\frac{2+2i}{\sqrt{2}}$에서

$$\begin{aligned}z^2&=\frac{(2+2i)^2}{(\sqrt{2})^2}=\frac{4+8i+4i^2}{2}=4i\\z^4&=(4i)^2=-16\\z^8&=(-16)^2=256\\&\vdots\end{aligned}$$

이다. 따라서 z^n이 양의 실수가 되는 자연수 n의 최솟값은 8이고 그때의 z^n의 값은 256이다.

답 $n=8$, $z^8=256$

184

$z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$일 때,

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8+z^{10}$$

의 값을 구하시오.

$z^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로 $z^4=-1$, $z^8=1$이다. 이를 이용하면 구하는 식의 값은

$$\begin{aligned}&1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8+z^{10}\\&=1+(z+z^2+z^3+z^4)+(z^5+z^6+z^7+z^8)+z^{10}\\&=1+(z+z^2+z^3+z^4)+z^4(z+z^2+z^3+z^4)+z^{10}\\&=1+(z+z^2+z^3+z^4)-(z+z^2+z^3+z^4)+z^2=1-i\end{aligned}$$

답 $1-i$

185

$\sqrt{a-5}\sqrt{-b+1}=-\sqrt{(a-5)(-b+1)}\neq 0$일 때,

$$|a-7|+|b+1|-|b-a+4|$$

를 간단히 하시오.

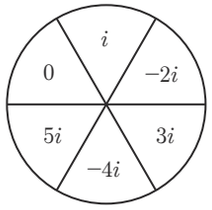
두 실수 m, n에 대하여 $\sqrt{m}\sqrt{n}=-\sqrt{mn}\neq 0$일 때, $m<0$, $n<0$이므로 주어진 조건에 의하여 $a-5<0$, $-b+1<0$, 즉 $a<5$, $b>1$이다. 따라서 $a-7<0$, $b+1>0$, $b-a+4>0$이므로

$$|a-7|+|b+1|-|b-a+4|=-(a-7)+b+1-(b-a+4)=4$$

답 4

186 기출

복소수 0, i, $-2i$, $3i$, $-4i$, $5i$가 적힌 다트판에 3개의 다트를 던져 맞히는 게임이 있다. 3개의 다트를 모두 다트판에 맞혔을 때, 얻을 수 있는 세 복소수를 a, b, c라 하자. a^2-bc의 최솟값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고 경계에 맞는 경우는 없다.)



① -49 ② -47 ③ -45
④ -43 ⑤ -41

a^2이 최솟값이고 bc가 최댓값일 때 a^2-bc는 최솟값을 가진다.
(i) $a=5i$일 때, a^2은 최솟값 -25를 가진다.
(ii) $b=-4i$, $c=5i$ 또는 $b=5i$, $c=-4i$일 때, bc는 최댓값 20을 가진다.
(i), (ii)에 의하여 a^2-bc는 a^2이 -25이고 bc가 20일 때, 최솟값 -45를 가진다.

답 ③

187 마타

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i$일 때,

$$x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$$

의 값을 구하시오.

$x^2=X$, $y^2=Y$로 치환하여 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6&=X^3-3X^2Y+3XY^2-Y^3\\&=(X-Y)^3=(x^2-y^2)^3\\&=\{(x+y)(x-y)\}^3\end{aligned}$$

이다. 이때, $x+y=\sqrt{3}$, $x-y=-2i$이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\{(x+y)(x-y)\}^3=(-2\sqrt{3}i)^3=-24\sqrt{3}i^3=24\sqrt{3}i$$

답 $24\sqrt{3}i$

188

복소수 z에 대하여 **[보기]**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

[보기]

ㄱ. z^2이 실수이면 $z-\overline{z}$는 순허수이다.
ㄴ. 자연수 n에 대하여 $(z-\overline{z})^{2n}$은 실수이다.
ㄷ. $z\overline{z}\geq 0$이다.
ㄹ. $\dfrac{z}{\overline{z}}$가 실수이면 z는 실수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

실수 a, b에 대하여 $z=a+bi$라 하면 $\overline{z}=a-bi$이다.
ㄱ. (거짓)【반례】$z=1$이면 $z^2=1$로 실수이고, $\overline{z}=1$이므로 $z-\overline{z}=0$에서 순허수가 되지 않는다.
ㄴ. (참) $(z-\overline{z})^{2n}=(2bi)^{2n}=(2b)^{2n}i^{2n}=(2b)^{2n}(-1)^n$이므로 실수이다.
ㄷ. (참) $z\overline{z}=a^2+b^2$은 실수의 제곱의 합이므로 $z\overline{z}\geq 0$이다.
ㄹ. (거짓)【반례】$z=i$이면 $\overline{z}=-i$이므로 $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{i}{-i}=-1$로 실수이다. 그러나 z는 실수가 아니다.

답 ④

189

두 복소수 $\alpha=4+ai$, $\beta=(5+b)-4i$에 대하여 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=11+2i$가 성립할 때, $\left(\dfrac{a+bi}{2}\right)^8$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이고 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

$\overline{\alpha}=4-ai$, $\overline{\beta}=(5+b)+4i$이므로

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(4-ai)+(5+b+4i)=(9+b)+(4-a)i=11+2i$$

이다. 이때 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$9+b=11,\ 4-a=2 \quad \Rightarrow \quad a=2,\ b=2$$

이다. 따라서 복소수의 거듭제곱에 의하여 구하는 값은 다음과 같다.

$$\left(\frac{a+bi}{2}\right)^8=\left(\frac{2+2i}{2}\right)^8=(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=16$$

답 16

190 마타

자연수 n에 대하여 $z_n=n(1-i)^n$으로 정의할 때, ${z_n}^2$이 양의 실수가 되는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

자연수 n에 대하여 ${z_n}^2=n^2(1-i)^{2n}=n^2(-2i)^n$이므로 $(-2i)^n$이 양의 실수가 되면 ${z_n}^2$도 양의 실수이다. 그러므로

$$(-2i)^1=-2i$$
$$(-2i)^2=4i^2=-4$$
$$(-2i)^3=-4\cdot(-2i)=8i$$
$$(-2i)^4=8i\cdot(-2i)=-16i^2=16$$
$$\vdots$$

에서 $(-2i)^n$은 n이 4의 배수일 때 양의 실수이다. 즉, ${z_n}^2$이 양의 실수가 되려면 n이 4의 배수이어야 한다. 따라서 100 이하의 자연수 중 4의 배수의 개수는 25이다.

답 25

서술형

191

0이 아닌 복소수

$$z=(x^2-4x+3)+(x^2+x-12)i$$

와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z=\overline{z}$가 성립할 때, 실수 x의 값을 구하시오.

실수 a, b에 대하여 $z=a+bi$라 하면 $\overline{z}=a-bi$이다. $z=\overline{z}$이므로

$$a+bi=a-bi \quad \Rightarrow \quad 2bi=0$$

에서 $b=0$이고, $z\neq0$이므로 $a\neq0$이다. [30%]

따라서 $z=(x^2-4x+3)+(x^2+x-12)i$에서

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\neq0,\quad x^2+x-12=(x+4)(x-3)=0$$

이므로 $x\neq1$, $x\neq3$이고 $x=-4$ 또는 $x=3$이다. [60%]

따라서 $x=-4$이다. [10%]

답 -4

192

복소수 $z=i^3(x-3i)^2$이 실수가 되도록 하는 실수 x의 값을 a, 그때의 z의 값을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값을 구하시오.

복소수 z를 정리하면

$$z=i^3(x-3i)^2=-i(x^2-6xi-9)=-6x-(x^2-9)i$$

이다. [30%]

이때, $x^2-9=0$이면 z는 실수이다. 따라서

$$x^2-9=(x-3)(x+3)=0$$

에서 $x=3$ 또는 $x=-3$이므로 $a=-3$ 또는 $a=-3$이다. [30%]

$a=3$일 때 $z=b=-18$이고, $a=-3$일 때 $z=b=18$이므로 [20%]

$a=3$, $b=-18$일 때, $a-b$의 최댓값은 21이다. [20%]

답 21

05 이차방정식

01 이차방정식의 풀이

1. 인수분해를 먼저 시도하고 인수분해가 되지 않으면 근의 공식을 이용한다.

2. 근의 공식: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 $\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

3. 절댓값 기호를 포함한 방정식

$|x|$와 $|x-a|$는 절댓값 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 다음과 같이 나누어 푼다.

(1) $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0\text{일 때}) \\ -x & (x<0\text{일 때}) \end{cases}$

(2) $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\geq a\text{일 때}) \\ -x+a & (x<a\text{일 때}) \end{cases}$

02 이차방정식의 판별식

1. 판별식: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여 판별식은 $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$

2. 근의 판별: a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

(1) $D>0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 실근

(2) $D=0 \iff$ 이차방정식은 중근 (서로 같은 두 실근)

(3) $D<0 \iff$ 이차방정식은 서로 다른 두 허근

03 이차방정식의 근과 계수의 관계

1. 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2. 두 수를 근으로 하는 이차방정식

x^2의 계수가 1이고 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2-(\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{두 근의 합}})x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}=0$$

3. 이차방정식의 두 근을 이용한 이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

4. 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여

(1) a, b, c가 유리수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

(2) a, b, c가 실수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다.
(단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

마·타·노·트

▶ **이차방정식** $ax^2+bx+c=0$

$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 이차방정식일 때, $a\neq 0$이다.

▶ $b=2b'$**인 경우 근의 공식**

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

▶ **절댓값** $|x|$

수직선의 원점에서 실수 x에 대응되는 점까지의 거리를 실수 x의 절댓값이라 하고, 기호로 $|x|$로 나타낸다.

▶ **판별식** $D=0$**을 이용하는 경우**

1. 이차방정식이 중근을 가질 때
2. 이차식이 완전제곱식이 될 때
3. x, y에 대한 이차식이 x, y의 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때

▶ $b=2b'$**인 경우 판별식**

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

▶ **두 근의 차**

α, β가 실수일 때,

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

정답 및 풀이 p.25

[193 ~ 195] 다음 이차방정식을 푸시오.

193 $2x^2+x-3=0$ $2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)=0$이므로 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$이다.

답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$

194 $x^2-18x+81=0$ $x^2-18x+81=(x-9)^2=0$이므로 $x=9$이다.

답 $x=9$ (중근)

195 $x^2-4x+2=0$ $x^2-4x+2=0$에서 근의 공식을 이용하면 $x=2\pm\sqrt{4-2}=2\pm\sqrt{2}$이다.

답 $x=2\pm\sqrt{2}$

[196 ~ 198] 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

196 $x^2-5x+2=0$ $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot2=17>0$

답 서로 다른 두 실근

197 $4x^2-12x+9=0$ $\frac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot9=0$

답 서로 같은 두 실근 (중근)

198 $x^2+3x+6=0$ $D=3^2-4\cdot1\cdot6=-15<0$

답 서로 다른 두 허근

[199 ~ 201] x에 대한 이차방정식 $x^2-6x+k=0$이 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 k의 값 또는 값의 범위를 구하시오.

199 서로 다른 두 실근을 가질 때 $\frac{D}{4}=(-3)^2-k>0$에서 $k<9$

답 $k<9$

200 중근을 가질 때 $\frac{D}{4}=(-3)^2-k=0$에서 $k=9$

답 $k=9$

201 서로 다른 두 허근을 가질 때 $\frac{D}{4}=(-3)^2-k<0$에서 $k>9$

답 $k>9$

[202 ~ 203] 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

202 $\alpha^2+\beta^2$

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$에서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25-6=19$

답 19

203 $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$ $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$에서

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=3+\frac{1}{3}+2=\frac{16}{3}$

답 $\frac{16}{3}$

[204 ~ 205] 다음 조건을 만족시키는 이차방정식을 구하시오.

204 -2, 3을 근으로 하고 x^2의 계수가 1

구하는 이차방정식의 두 근을 $\alpha=-2$, $\beta=3$이라 하면 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-6$이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-x-6=0$이다.

답 $x^2-x-6=0$

205 $2+i$, $2-i$를 근으로 하고 x^2의 계수가 1 (단, $i=\sqrt{-1}$)

구하는 이차방정식의 두 근을 $\alpha=2+i$, $\beta=2-i$라 하면 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=4-i^2=5$이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-4x+5=0$이다.

답 $x^2-4x+5=0$

[206 ~ 207] 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

206 x^2-2x+4 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 근은 $x=1\pm\sqrt{(-1)^2-4}=1\pm\sqrt{3}i$

이므로 $x^2-2x+4=(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$이다.

답 $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

207 x^2+x+2 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 근은 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

이므로 $x^2+x+2=\left(x+\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)$이다.

답 $\left(x+\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)$

개념 적용

개념 01. 이차방정식의 풀이

(x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 정리한 후, 인수분해하거나 근의 공식을 이용하여 푼다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

208 중요

이차방정식 $6(x-1)^2=-7x+5$를 푸시오.

주어진 식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$6(x^2-2x+1)=-7x+5 \quad \Rightarrow \quad 6x^2-5x+1=(2x-1)(3x-1)=0$$

이므로 주어진 이차방정식의 해는 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$이다.

답 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

209

이차방정식 $x^2+(2-3\sqrt{2})x-6\sqrt{2}=0$을 푸시오.

주어진 방정식의 좌변의 식을 인수분해하여 정리하면

$$x^2+(2-3\sqrt{2})x-6\sqrt{2}=(x+2)(x-3\sqrt{2})=0$$

에서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-2$ 또는 $x=3\sqrt{2}$이다.

답 $x=-2$ 또는 $x=3\sqrt{2}$

210

x에 대한 이차방정식 $x^2+kx-12=0$의 한 근이 4일 때, 나머지 한 근을 α라 하자. x에 대한 이차방정식 $x^2+(k-3)x-k\alpha=0$을 푸시오. (단, k는 상수이다.)

이차방정식 $x^2+kx-12=0$의 한 근이 4이므로

$$16+4k-12=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1$$

이다. 따라서

$$x^2+kx-12=x^2-x-12=(x+3)(x-4)=0$$

에서 나머지 한 근은 $\alpha=-3$이다. 이때

$$x^2+(k-3)x-k\alpha=x^2-4x-3=0$$

에서 구하는 이차방정식의 해는 근의 공식을 이용하면 $x=2\pm\sqrt{7}$이다.

답 $x=2\pm\sqrt{7}$

개념 02. 절댓값 기호를 포함한 방정식

절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나누어서 구한다.
이때, 나누어진 범위를 만족시키는 것만 근이다.

211 중요

방정식 $x^2-|x-2|-4=0$을 푸시오.

주어진 방정식에서

(i) $x<2$일 때, $|x-2|=-(x-2)$이므로 주어진 방정식은 $x^2+x-6=0$이다. 따라서

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)=0$$

에서 $x<2$이므로 $x=-3$이다.

(ii) $x\geq 2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로 주어진 방정식은 $x^2-x-2=0$이다. 따라서

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$$

에서 $x\geq 2$이므로 $x=2$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=-3$ 또는 $x=2$이다.

답 $x=-3$ 또는 $x=2$

212

방정식 $|x-2|(x-7)+6=0$의 모든 근의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

주어진 방정식에서

(i) $x<2$일 때, $|x-2|=-x+2$이므로 주어진 방정식은 $-(x-2)(x-7)+6=0$이다.
이를 정리하면

$$x^2-9x+8=(x-1)(x-8)=0$$

에서 $x<2$이므로 $x=1$이다.

(ii) $x\geq 2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로 주어진 방정식은 $(x-2)(x-7)+6=0$이다.
이를 정리하면

$$x^2-9x+20=(x-4)(x-5)=0$$

에서 $x\geq 2$이므로 $x=4$ 또는 $x=5$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 근의 합은 $1+4+5=10$이다.

답 ⑤

213

x에 대한 방정식 $x^2-2|x|-a=0$의 한 근이 3일 때, 나머지 근을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

주어진 근 3을 방정식 $x^2-2|x|-a=0$에 대입하면 $9-6-a=0$에서 $a=3$이다. 따라서 방정식 $x^2-2|x|-3=0$을 풀면

(i) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 주어진 방정식은 $x^2+2x-3=0$이다.
따라서

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)=0$$

에서 $x<0$이므로 $x=-3$이다.

(ii) $x\geq 0$일 때, $|x|=x$이므로 주어진 방정식은 $x^2-2x-3=0$이다.
따라서

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$$

에서 $x\geq 0$이므로 $x=3$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 나머지 근은 -3이다.

답 -3

개념 03. 판별식을 이용한 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면
(단, a, b, c는 실수)

1. $D>0 \iff$ 서로 다른 두 실근
2. $D=0 \iff$ 중근(서로 같은 두 실근)
3. $D<0 \iff$ 서로 다른 두 허근

214 중요

x에 대한 이차방정식 $x^2-3x+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오.

주어진 이차방정식 $x^2-3x+k-1=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(-3)^2-4(k-1)=13-4k>0 \quad \Rightarrow \quad k<\frac{13}{4}$$

에서 정수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

215

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2-2x+a+b=0, \quad x^2+6x+a-b=0$$

이 모두 중근을 가질 때, 두 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -20 ② -10 ③ 5
④ 10 ⑤ 20

이차방정식 $x^2-2x+a+b=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(a+b)=0 \quad \Rightarrow \quad a+b=1 \qquad \cdots ㉠$$

이고 이차방정식 $x^2+6x+a-b=0$의 판별식을 D'이라 할 때,

$$\frac{D'}{4}=3^2-(a-b)=0 \quad \Rightarrow \quad a-b=9 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-4$이므로 $ab=-20$이다.

답 ①

216

x에 대한 이차방정식 $x^2-5x+k+5=0$이 허근을 가지도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

이차방정식 $x^2-5x+k+5=0$의 판별식을 D라 할 때, 주어진 이차방정식이 허근을 가지도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$$D=(-5)^2-4(k+5)=25-4(k+5)<0$$

에서 $k>\frac{5}{4}$이다.

답 $k>\frac{5}{4}$

개념 04. 이차식이 완전제곱식이 될 조건

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D가 $D=b^2-4ac=0$이어야 한다.

217 중요

x에 대한 이차식 $x^2-(k+1)x+k+4$가 완전제곱식이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식

$$x^2-(k+1)x+k+4=0$$

이 중근을 가진다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(k+1)^2-4(k+4)=k^2-2k-15=(k+3)(k-5)=0$$

에서 $k=-3$ 또는 $k=5$이므로 모든 k의 값의 합은 2이다.

답 ④

218

x에 대한 이차식 $x^2-2ax+kb^2+6a-k$가 k의 값에 관계없이 항상 완전제곱식이 될 때, 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식

$$x^2-2ax+kb^2+6a-k=0$$

이 중근을 가진다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-kb^2-6a+k=(a^2-6a)-k(b^2-1)=0$$

이다. 이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 항등식의 성질에 의하여

$$a^2-6a=0, \ b^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad a(a-6)=0, \ (b+1)(b-1)=0$$

이다. a, b가 모두 양수이므로 $a=6$, $b=1$이고 구하는 값은 $a+b=7$이다.

답 7

219

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 x에 대한 이차식

$$(b+c)x^2-2ax+b-c$$

가 완전제곱식일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식

$$(b+c)x^2-2ax+b-c=0$$

이 중근을 가진다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=a^2-(b+c)(b-c)=a^2-b^2+c^2=0$$

이다. 따라서 $b^2=a^2+c^2$이므로 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

답 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

개념 05. 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

220 중요!

이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$이므로 구하는 값은

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{4^3-3\cdot5\cdot4}{5}=\frac{4}{5}$$

답 ④

221

이차방정식 $x^2-6x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$$(\alpha^2-2\alpha+2)(\beta^2-2\beta+2)$$

의 값을 구하시오.

이차방정식의 $x^2-6x-2=0$의 두 근이 α, β이므로

$$\alpha^2-6\alpha-2=0, \quad \beta^2-6\beta-2=0$$

이다. 따라서 구하는 식을 변형하면

$$\begin{aligned}&(\alpha^2-2\alpha+2)(\beta^2-2\beta+2)\\&=\{(\alpha^2-6\alpha-2)+4\alpha+4\}\{(\beta^2-6\beta-2)+4\beta+4\}\\&=(4\alpha+4)(4\beta+4)=16(\alpha+1)(\beta+1)\\&=16\{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1\}\end{aligned}$$

이다. 이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-2$이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$16\{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1\}=16\cdot(-2+6+1)=80$$

답 80

222

x에 대한 이차방정식 $x^2-8x+k=0$의 두 근의 비가 1:3일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

두 근의 비가 1:3이므로 이차방정식 $x^2-8x+k=0$의 두 근을 α, 3α로 놓을 수 있다. (단, $\alpha\neq0$) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+3\alpha=8 \quad\Rightarrow\quad \alpha=2$$

$$\alpha\cdot3\alpha=k \quad\Rightarrow\quad 3\alpha^2=k$$

이므로 구하는 값은 $k=3\cdot2^2=12$이다.

답 12

개념 06. 두 수를 근으로 하는 이차방정식

x^2의 계수가 1이고 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

223 중요!

이차방정식 $x^2+3x-6=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2+x-8=0$ ② $x^2+x+8=0$
③ $x^2+2x-8=0$ ④ $x^2+2x+8=0$
⑤ $x^2+4x-8=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-6$이므로 두 수 $\alpha+1$, $\beta+1$의 합과 곱을 각각 구하면

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=-1$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-8$$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2+x-8=0$이다.

답 ①

224

이차방정식 $3x^2+4x+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식이 $2x^2+ax+b=0$이다. 이때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$이므로 두 수 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 합과 곱을 각각 구하면

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-2, \quad \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{3}{2}$$

이다. 이때 두 수 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+2x+\frac{3}{2}=0$이고 이 방정식의 양변에 2를 곱하면 $2x^2+4x+3=0$이다. 따라서 $a=4$, $b=3$이고 구하는 값은 $a+b=7$이다.

답 7

225

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $2\alpha+1$, $2\beta+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+2x+13=0$이다. 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=b$$

이므로 두 수 $2\alpha+1$, $2\beta+1$의 합과 곱을 구하면

$$(2\alpha+1)+(2\beta+1)=2(\alpha+\beta)+2=-2a+2$$

$$(2\alpha+1)(2\beta+1)=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=4b-2a+1$$

이다. 이때 이차방정식 $x^2+2x+13=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2a+2=-2, \quad 4b-2a+1=13$$

이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$이다. 따라서 구하는 값은 $ab=8$이다.

답 8

개념 07. 복소수의 범위에서의 인수분해

a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차식 ax^2+bx+c를 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

226 중요

이차식 x^2-4x+8을 복소수의 범위에서 인수분해하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $(x-2i)(x+2i)$ ② $(x-1-2i)(x-1+2i)$
③ $(x+1-2i)(x+1+2i)$ ④ $(x-2-2i)(x-2+2i)$
⑤ $(x+2-2i)(x+2+2i)$

근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2-4x+8=0$의 해를 구하면

$$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-8}=2\pm2i$$

이므로 이차식 x^2-4x+8은 복소수의 범위에서 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^2-4x+8=(x-2-2i)(x-2+2i)$$

답 ④

227

이차식 $2x^2-4x+6$을 복소수의 범위에서 인수분해하면 $a(x+b+ci)(x+b-ci)$이다. 실수 a, b, c의 곱 abc의 값을 구하시오. (단, $c>0$이고 $i=\sqrt{-1}$)

근의 공식을 이용하여 이차방정식 $2x^2-4x+6=0$의 해를 구하면

$$x=1\pm\sqrt{(-1)^2-3}=1\pm\sqrt{2}i$$

이다. 따라서 주어진 이차식을 인수분해하면

$$2x^2-4x+6=2(x^2-2x+3)=2(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$$

에서 $a=2$, $b=-1$, $c=\sqrt{2}$이므로 구하는 값은 $abc=-2\sqrt{2}$이다.

답 $-2\sqrt{2}$

228

이차식 $3x^2-4x+2$를 복소수의 범위에서 인수분해할 때, 다음 중 이 이차식의 인수인 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $x-\dfrac{2-\sqrt{2}i}{3}$ ② $x-\dfrac{3-\sqrt{2}i}{3}$ ③ $x-\dfrac{4-\sqrt{2}i}{3}$
④ $x-\dfrac{2-\sqrt{2}i}{6}$ ⑤ $x-\dfrac{3-\sqrt{2}i}{6}$

근의 공식을 이용하여 이차방정식 $3x^2-4x+2=0$의 해를 구하면 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$이다. 따라서 주어진 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$3x^2-4x+2=3\left(x-\frac{2+\sqrt{2}i}{3}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}i}{3}\right)$$

이므로 $x-\dfrac{2-\sqrt{2}i}{3}$가 주어진 이차식의 인수이다.

답 ①

개념 08. 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여

1. a, b, c가 유리수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)
2. a, b, c가 실수일 때, 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

229 중요

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고 a, b가 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$도 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \quad \Rightarrow \quad a=-4$$

$$b=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

이므로 구하는 값은 $ab=-4$이다.

답 ②

230

x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2-i$일 때, $p+q$, pq를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. (단, p, q는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$)

주어진 이차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $2-i$이므로 $2+i$도 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-p=(2-i)+(2+i)=4 \quad \Rightarrow \quad p=-4$$

$$q=(2+i)(2-i)=4-i^2=5$$

이므로 $p+q=1$, $pq=-20$이다. 이때, $p+q+pq=-19$, $(p+q)pq=-20$이므로 $p+q$, pq를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+19x-20=0$이다. 따라서 $a=19$, $b=-20$에서 구하는 값은 $a-b=39$이다.

답 39

231

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $(1-i)^3$일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$)

복소수의 연산을 하면

$$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$$

$$(1-i)^3=(1-i)^2(1-i)=-2i(1-i)=-2i+2i^2=-2-2i$$

이다. 이때 주어진 이차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $-2-2i$이므로 $-2+2i$도 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=(-2-2i)+(-2+2i)=-4 \quad \Rightarrow \quad a=4$$

$$b=(-2-2i)(-2+2i)=4-4i^2=8$$

이므로 구하는 값은 $a+b=12$이다.

답 12

232

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-3)x+k=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(k-3)^2-k=k^2-7k+9=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 이때 주어진 이차방정식이 중근을 가지도록 하는 실수 k의 값은 k에 대한 이차방정식 ㉠의 실근이다. 이차방정식 ㉠의 판별식을 D'이라 할 때,

$$D'=(-7)^2-4\cdot 9=13>0$$

이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가지고 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 7이다. 즉, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 7이다.

답 7

233

x에 대한 이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 두 근을 각각 α, β라 할 때, α^3, β^3은 x에 대한 이차방정식 $x^2-9x+b=0$의 두 근이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=a$$

이다. 또한 이차방정식 $x^2-9x+b=0$의 두 근이 α^3, β^3이므로 근과 계수의 관계와 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-9a=9 \quad \Rightarrow \quad a=2$$

$$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=a^3=8=b$$

이므로 구하는 값은 $a+b=10$이다.

답 10

234

x에 대한 이차방정식

$$(n^2-6n+8)x^2-2(n-4)x+1=0$$

이 실근을 가지도록 하는 자연수 n의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

주어진 등식이 x에 대한 이차방정식이므로 x^2의 계수가 0이 아니다. 즉,

$$n^2-6n+8\neq 0 \quad \Rightarrow \quad (n-2)(n-4)\neq 0$$

에서 $n\neq 2$, $n\neq 4$이다. 또한 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(n-4)^2-(n^2-6n+8)\geq 0 \quad \Rightarrow \quad n\leq 4$$

이다. 따라서 주어진 이차방정식이 실근을 가지도록 하는 자연수 n은 $n\leq 4$, $n\neq 2$, $n\neq 4$인 자연수이므로 1, 3이고 그 개수는 2이다.

답 ③

235

x에 대한 이차방정식 $x^2-2ax+5a-1=0$의 두 근이 자연수이고 차가 2일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

주어진 이차방정식의 두 근을 n, $n+2$ (n은 자연수)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$n+(n+2)=2a \quad \Rightarrow \quad a=n+1 \quad \cdots ㉠$$

$$n(n+2)=5a-1 \quad \Rightarrow \quad 5a=n^2+2n+1 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $n^2-3n-4=0$에서 $(n+1)(n-4)=0$이고 n이 자연수이므로 $n=4$이다. 이를 ㉠에 대입하면 구하는 값은 $a=n+1=5$이다.

답 5

236 마타

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이

$$\frac{\sqrt{5}\sqrt{10}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}}+\sqrt{-12}\sqrt{-3}$$

일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

음수의 제곱근의 성질에 의하여

$$\frac{\sqrt{5}\sqrt{10}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}}+\sqrt{-12}\sqrt{-3}=-\sqrt{-25}+\sqrt{-9}-\sqrt{36}$$

$$=-5i+3i-6=-6-2i$$

이다. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 모든 계수가 실수이고 $-6-2i$가 근이므로 $-6+2i$도 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-6-2i)+(-6+2i)=-12=-a \quad \Rightarrow \quad a=12$$

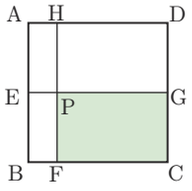
$$(-6-2i)(-6+2i)=36-4i^2=40=b$$

이므로 $a=12$, $b=40$에서 구하는 값은 $a+b=52$이다.

답 52

237 기출

한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P를 잡고 점 P를 지나고 정사각형의 각 변에 평행한 두 직선이 정사각형의 네 변과 만나는 점을 각각 E, F, G, H라 하자.



직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이고 넓이가 46일 때, 두 선분 AE와 AH의 길이를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하시오. (단, 이차방정식의 이차항의 계수는 1이다.)

$\overline{AH}=\alpha$, $\overline{AE}=\beta$라 하면 $\overline{PG}=10-\alpha$, $\overline{PF}=10-\beta$이다. 직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이고 넓이가 46이므로

$$2\{(10-\alpha)+(10-\beta)\}=28 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta=6$$

$$(10-\alpha)(10-\beta)=46 \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta=6$$

이다. 따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$에서 $x^2-6x+6=0$이다.

답 $x^2-6x+6=0$

서술형

238

방정식 $x|x-1|+3|x-1|-4=0$의 모든 근의 합을 구하시오.

$x<1$일 때, $|x-1|=-x+1$이고 $x\geq 1$일 때, $|x-1|=x-1$이다. [20%]

(i) $x<1$일 때, 주어진 방정식은

$$-x(x-1)-3(x-1)-4=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x+1=0$$

이므로 $x=-1$이다. [35%]

(ii) $x\geq 1$일 때, 주어진 방정식은

$$x(x-1)+3(x-1)-4=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x-7=0$$

에서 근의 공식을 이용하면 $x=-1\pm 2\sqrt{2}$이다. 이때 $x\geq 1$이므로 $x=2\sqrt{2}-1$이다. [35%]

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$-1+(2\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$$

이다. [10%]

답 $2\sqrt{2}-2$

239

지연이와 종훈이가 이차방정식 x에 대한 $x^2+ax+b=0$ (단, a, b는 유리수)를 푸는데 지연이는 일차항의 계수 a를 다른 유리수로 보고 풀었더니 한 근이 $1-\sqrt{3}$이었고 종훈이는 상수항 b를 다른 유리수로 보고 풀었더니 한 근이 $2+\sqrt{2}$이었다. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 올바른 근을 구하시오.

지연이가 a 대신 잘못 본 일차항의 계수를 a' (단, a'은 유리수)라 하면 x에 대한 이차방정식 $x^2+a'x+b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로 $1+\sqrt{3}$도 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$b=(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=1-3=-2$$

이다. [40%]

종훈이가 b 대신 잘못 본 상수항을 b' (단, b'은 유리수)라 하면 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b'=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{2}$이므로 $2-\sqrt{2}$도 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4 \quad \Rightarrow \quad a=-4$$

이다. [40%]

따라서 두 학생이 풀려고 했던 이차방정식은 $x^2-4x-2=0$이다. 근의 공식을 이용하여 이 이차방정식을 풀면

$$x=2\pm\sqrt{(-2)^2+2}=2\pm\sqrt{6}$$

이다. [20%]

답 $x=2\pm\sqrt{6}$

06 이차방정식과 이차함수

01 이차방정식과 이차함수

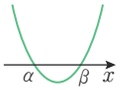
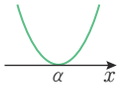
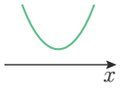
1. 이차방정식과 이차함수의 관계

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근

(2) 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 결정

$a>0$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 근	서로 다른 두 실근	서로 같은 두 실근 (중근)	서로 다른 두 허근
x축과의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			

2. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$의 부호에 따라 결정

(1) $\boldsymbol{D>0}$ **일 때**: 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $\boldsymbol{D=0}$ **일 때**: 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $\boldsymbol{D<0}$ **일 때**: 만나지 않는다.

02 이차함수의 최대, 최소

1. 이차함수의 최대, 최소

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

(1) $a>0$일 때: $x=p$에서 최솟값 q, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$일 때: $x=p$에서 최댓값 q, 최솟값은 없다.

2. 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

(1) $\alpha\le p\le\beta$일 때, $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값

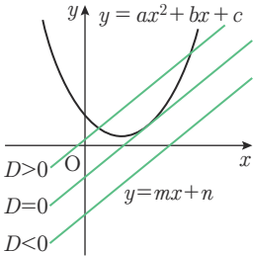
(2) $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값

마·타·노·트

▶ **이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 개수**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다.

▶ **이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계**



▶ **이차함수의 최대, 최소의 활용**

최대, 최소의 활용문제는 문제에서 별도로 언급하지 않은 조건도 따져보아야 한다.

개념 확인

정답 및 풀이 p.30

[240 ~ 241] 다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 각각 구하시오.

240 $y=x^2-4x+3$ $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 꼭짓점은 $(2, -1)$이고 축의 방정식은 $x=2$이다.

답 꼭짓점: $(2, -1)$, 축의 방정식: $x=2$

241 $y=3x^2-6x+7$ $y=3x^2-6x+7=3(x-1)^2+4$이므로 꼭짓점은 $(1, 4)$이고 축의 방정식은 $x=1$이다.

답 꼭짓점: $(1, 4)$, 축의 방정식: $x=1$

[242 ~ 244] 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

242 $y=x^2-5x+4$ 이차방정식 $x^2-5x+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-5)^2-4\cdot4=9>0$이므로 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 2

243 $y=2x^2-3x+5$ 이차방정식 $2x^2-3x+5=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot5=-31<0$이므로 x축과 만나지 않는다.

답 0

244 $y=4x^2-12x+9$ 이차방정식 $4x^2-12x+9=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot9=0$이므로 x축과 한 점에서 만난다.

답 1

[245 ~ 246] 다음 물음에 답하시오.

245 이차함수 $y=x^2+4x-12$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하시오. $x^2+4x-12=(x-2)(x+6)=0$이므로 $x=2$ 또는 $x=-6$

답 2 또는 -6

246 이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표를 구하시오. 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하면 $x^2-2x+3=x+1$에서 $x^2-3x+2=0$이다. 이차방정식을 풀면 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$에서 교점의 x좌표는 1 또는 2이다.

답 1 또는 2

[247 ~ 249] 다음 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 구하시오.

247 $y=2x^2+3x+2$, $y=-2x-4$ 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하면 $2x^2+3x+2=-2x-4$에서 $2x^2+5x+6=0$이다. 이차방정식 $2x^2+5x+6=0$의 판별식을 D라 하면 $D=5^2-4\cdot2\cdot6=-23<0$이므로 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

248 $y=-3x^2+7x+2$, $y=3x+1$ 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하면 $-3x^2+7x+2=3x+1$에서 $3x^2-4x-1=0$이다. 이차방정식 $3x^2-4x-1=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-2)^2-3\cdot(-1)=7>0$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

249 $y=4x^2+6x+9$, $y=2x+8$ 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하면 $4x^2+6x+9=2x+8$에서 $4x^2+4x+1=0$이다. 이 방정식 $4x^2+4x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=2^2-4\cdot1=0$이므로 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

[250 ~ 251] 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

250 $y=-3(x+5)^2+4$ $y=-3(x+5)^2+4$는 위로 볼록한 모양의 그래프이므로 최솟값은 없다. $x=-5$일 때 주어진 이차함수는 최댓값 4를 가진다.

답 최솟값: 없다, 최댓값: 4

251 $y=x^2+6x+7$ $y=x^2+6x+7=(x+3)^2-2$는 아래로 볼록한 모양의 그래프이므로 최댓값은 없다. $x=-3$일 때 주어진 이차함수는 최솟값 -2를 가진다.

답 최솟값: -2, 최댓값: 없다

[252 ~ 253] 주어진 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

252 $y=(x-4)^2-3$ $(2\le x\le5)$ $y=(x-4)^2-3$은 아래로 볼록한 모양의 그래프이고 꼭짓점의 x좌표 4는 주어진 범위 안에 있으므로 $x=4$일 때 최솟값은 -3이고, $x=2$일 때 최댓값은 1이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -3

253 $y=-x^2+10x-23$ $(1\le x\le4)$ $y=-x^2+10x-23=-(x-5)^2+2$는 위로 볼록한 모양의 그래프이고 꼭짓점의 x좌표 5는 주어진 범위의 밖에 있다. 주어진 이차함수는 $x=1$일 때 -14이고, $x=4$일 때 1이므로 최댓값은 1이고 최솟값은 -14이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -14

개념 적용

개념 01. 이차함수의 그래프

$y=ax^2+bx+c \Rightarrow y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

1. 꼭짓점의 좌표: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
2. 축: $x=-\frac{b}{2a}$

254

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 y절편이 2이고 이차함수의 그래프가 두 점 $(2, 0)$, $(3, 2)$를 지날 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

주어진 이차함수의 y절편이 2이므로 $c=2$이다. 이 이차함수 $y=ax^2+bx+2$의 그래프가 두 점 $(2, 0)$, $(3, 2)$를 지나므로

$$4a+2b+2=0, \quad 9a+3b+2=2$$

에서 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c=1-3+2=0$이다.

답 ③

255 중요

이차함수 $y=-2x^2+4ax-a^2+2a-4$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(a, 5a)$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

주어진 이차함수를 표준형으로 나타내면

$$y=-2(x-a)^2+a^2+2a-4$$

이므로 이차함수의 꼭짓점은 (a, a^2+2a-4)이다. 따라서

$$5a=a^2+2a-4 \Rightarrow a^2-3a-4=(a+1)(a-4)=0$$

에서 $a>0$이므로 $a=4$이다.

답 4

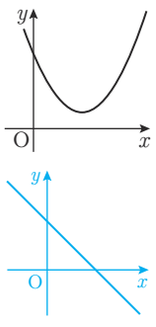
개념 02. 이차함수의 그래프와 계수의 부호

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

1. a: $a>0$이면 아래로 볼록, $a<0$이면 위로 볼록
2. b: $ab<0$이면 축이 y축의 오른쪽, $ab>0$이면 축이 y축의 왼쪽
3. c: $c>0$이면 y절편이 양수, $c<0$이면 y절편이 음수

256

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{a}$가 지나지 않는 사분면을 구하시오.

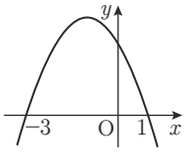


주어진 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$, y절편이 양수이므로 $c>0$이다. 즉, 구하는 직선의 y절편이 $\frac{c}{a}>0$이다. 또한, 주어진 그래프의 축이 y축의 오른쪽이므로 $ab<0$에서 구하는 직선의 기울기가 $\frac{a}{b}<0$이다. 따라서 구하는 직선의 개형이 오른쪽 그림과 같으므로 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.

답 제3사분면

257 중요

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, **[보기]**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.)



[보기]

ㄱ. $a<0$ ㄴ. $a+b+c=0$ ㄷ. $4a-2b+c<0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. (참) 주어진 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$이다.
ㄴ. (참) 그래프에서 $x=1$일 때, 함숫값이 x축 위에 있으므로 $a+b+c=0$이다.
ㄷ. (거짓) 그래프에서 $x=-2$일 때, 함숫값이 x축보다 위에 있으므로 $4a-2b+c>0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

개념 03. 이차방정식과 이차함수의 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따라 결정된다.

1. $D>0$일 때: 서로 다른 두 점에서 만난다.
2. $D=0$일 때: 한 점에서 만난다. (접한다.)
3. $D<0$일 때: 만나지 않는다.

258 중요

이차함수 $y=ax^2+3x+b$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 각각 -4, 3일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 x에 대한 이차방정식 $ax^2+3x+b=0$의 두 근 -4, 3이므로

$$ax^2+3x+b=a(x+4)(x-3)=ax^2+ax-12a$$

이다. 따라서 $a=3$, $b=-36$이고 구하는 값은 $a+b=-33$이다.

답 -33

259

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표가 각각 a, b이고 $a+b=4$일 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x+2}{2}\right)=0$의 두 실근의 합을 구하시오.

$y=f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 a, b (단, $a\neq b$)이므로

$$f(x)=(x-a)(x-b) \Rightarrow f\left(\frac{x+2}{2}\right)=\frac{1}{4}(x+2-2a)(x+2-2b)$$

이다. 따라서 이차방정식 $f\left(\frac{x+2}{2}\right)=0$의 두 실근은 $2a-2$, $2b-2$이므로 두 실근의 합은 $2a+2b-4=2(a+b)-4=2\cdot4-4=4$이다.

답 4

260

이차함수 $y=x^2+2kx+3k-2$의 그래프가 x축에 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

이차함수의 그래프가 x축에 접하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+3k-2=0$이 중근을 가진다. 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3k+2=(k-1)(k-2)=0$$

이다. 따라서 $k=1$ 또는 $k=2$이므로 모든 실수 k의 값의 곱은 $1\cdot2=2$이다.

답 2

261

유리수 a, b에 대하여 두 이차함수 $y=2x^2+6x+5$, $y=x^2+ax+b$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P의 x좌표가 $1-\sqrt{5}$일 때, $3a-b$의 값을 구하시오.

두 이차함수의 그래프의 교점의 x좌표는 x에 대한 이차방정식

$$2x^2+6x+5=x^2+ax+b \quad \Rightarrow \quad x^2+(6-a)x+5-b=0$$

의 두 실근이다. $6-a$와 $5-b$는 유리수이고 이차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{5}$이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-6+a=(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=2, \quad 5-b=(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=-4$$

이므로 $a=8$, $b=9$이다. 따라서 구하는 값은 $3a-b=15$이다.

답 15

개념 04. 이차함수와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 판별식 D의 부호에 따라 결정된다.

1. $D>0$일 때: 서로 다른 두 점에서 만난다.
2. $D=0$일 때: 한 점에서 만난다. (접한다.)
3. $D<0$일 때: 만나지 않는다.

262 중요!

이차함수 $y=x^2+4ax+4a^2+4$의 그래프와 직선 $y=x+4$가 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하면 x에 대한 이차방정식 $x^2+(4a-1)x+4a^2=0$을 얻는다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(4a-1)^2-16a^2\geq0 \quad \Rightarrow \quad a\leq\frac{1}{8}$$

이다. 따라서 조건을 만족하는 실수 a의 값의 범위는 $a\leq\frac{1}{8}$이다.

답 $a\leq\frac{1}{8}$

263

이차함수 $y=x^2+3x+4$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B의 x좌표를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

두 점 A와 B의 x좌표는 x에 대한 이차방정식 $x^2+3x+4=x+k$의 실근과 같다.

$$x^2+3x+4=x+k \quad \Rightarrow \quad x^2+2x+4-k=0$$

에서 점 A의 x좌표가 3이므로 $x=3$을 대입하면 $k=19$이다. 따라서

$$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)=0$$

이고, 점 B의 x좌표는 -5이다.

답 -5

264

이차함수 $y=x^2-2kx+k^2+4k-3$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 접할 때, $m-n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

이차함수의 그래프와 직선이 접하므로 x에 대한 이차방정식

$$x^2-2kx+k^2+4k-3=mx+n$$

$$\Rightarrow \quad x^2-(2k+m)x+k^2+4k-3-n=0$$

의 판별식 D에 대하여

$$D=(2k+m)^2-4(k^2+4k-3-n)=k(4m-16)+(m^2+4n+12)=0$$

이다. 이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 항등식의 성질에 의하여

$$4m-16=0, \quad m^2+4n+12=0$$

이고 두 식을 연립하여 풀면 $m=4$, $n=-7$이다. 따라서 구하는 값은 $m-n=11$이다.

답 11

265

함수 $f(x)=(k+1)x^2-2kx+4$의 그래프와 직선 $g(x)=2x-k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 k의 최댓값을 구하시오.

(i) $k=-1$인 경우 두 함수 $f(x)=2x+4$와 $g(x)=2x+1$은 서로 평행하므로 만나지 않는다.

(ii) $k\neq-1$인 경우 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 x에 대한 이차방정식

$$(k+1)x^2-2kx+4=2x-k \quad \Rightarrow \quad (k+1)x^2-2(k+1)x+k+4=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가진다. 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k+1)(k+4)=-3k-3>0$$

이고, $k<-1$이므로 이를 만족하는 정수 k의 최댓값은 -2이다.

(i), (ii)에서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

답 -2

개념 05. 이차함수의 최대, 최소

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

1. $a>0$일 때: $x=p$에서 최솟값이 q이고, 최댓값은 없다.
2. $a<0$일 때: $x=p$에서 최댓값이 q이고, 최솟값은 없다.

266 중요!

이차함수 $y=ax^2+6ax+a^2-4$의 최솟값이 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

주어진 이차함수를 표준형으로 변형하면

$$y=a(x^2+6x)+a^2-4=a(x+3)^2+a^2-9a-4$$

이다. 이 함수가 최솟값을 가지므로 $a>0$이고 $a^2-9a-4=6$이다.

$$a^2-9a-4=6 \quad \Rightarrow \quad a^2-9a-10=(a+1)(a-10)=0$$

에서 $a>0$이므로 $a=10$이다.

답 10

267

이차함수 $y=-x^2+2kx-3k+4$의 최댓값이 10이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은?

① -3 ② -4 ③ -5

④ -6 ⑤ -7

주어진 이차함수를 표준형으로 변형하면

$$y=-(x^2-2kx)-3k+4=-(x-k)^2+k^2-3k+4$$

이므로 $x=k$일 때, 최댓값 $k^2-3k+4=10$을 가진다. 즉,

$$k^2-3k+4=10 \quad \Rightarrow \quad k^2-3k-6=0$$

이다. k에 대한 이차방정식 $k^2-3k-6=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-6)=33>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은 -6이다.

답 ④

268

이차함수 $f(x)=x^2-2kx-2k+6$의 최솟값을 $g(k)$라 할 때, $g(k)$의 최댓값과 그때의 실수 k의 값을 구하시오.

주어진 이차함수를 표준형으로 변형하면

$$f(x)=(x^2-2kx)-2k+6=(x-k)^2-k^2-2k+6$$

이므로 $x=k$일 때, 최솟값 $g(k)=-k^2-2k+6$을 가진다. 또한

$$g(k)=-k^2-2k+6=-(k+1)^2+7$$

에서 $g(k)$는 $k=-1$일 때, 최댓값 7을 가진다.

답 $k=-1$, 최댓값: 7

개념 06. 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

1. $\alpha\le x\le\beta$일 때: $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
2. $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때: $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

269 중요!

$-3\le x\le2$에서 이차함수 $y=x^2-6x+k-2$의 최댓값이 8일 때, 최솟값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

이차함수의 식을 표준형으로 변형하면 $y=(x-3)^2+k-11$이다. 주어진 범위는 $-3\le x\le2$이므로 꼭짓점의 x좌표 3을 포함하지 않는다.

$$x=-3\text{일 때,} \quad \Rightarrow \quad (-3)^2-6\cdot(-3)+k-2=k+25 \qquad \cdots ㉠$$

$$x=2\text{일 때,} \quad \Rightarrow \quad 2^2-6\cdot2+k-2=k-10 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠>㉡이므로 주어진 이차함수는 $x=-3$일 때 최댓값을 가지고 $x=2$일 때 최솟값을 가진다. ㉠에서 $k+25=8$이므로 $k=-17$이다. 즉, ㉡에서 최솟값은 $k-10=-17-10=-27$이다.

답 -27

270

$1\le x\le3$에서 이차함수 $f(x)=2x^2+8x-12$가 $x=a$일 때, 최솟값을 가진다. 이때, 이차함수 $g(x)=-x^2+4x+6-a$의 최댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

이차함수 $f(x)$의 식을 표준형으로 변형하면 $f(x)=2(x+2)^2-20$이다. 주어진 범위는 $1\le x\le3$이므로 꼭짓점의 x좌표 -2를 포함하지 않는다. 한편,

$$f(1)=2\cdot(1+2)^2-20=-2, \quad f(3)=2(3+2)^2-20=30$$

이다. 따라서 이차함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 최솟값을 가진다. 즉, $a=1$이다. 이차함수 $g(x)$의 식을 표준형으로 변형하면 $g(x)=-(x-2)^2+10-a$이다. $a=1$이므로 $x=2$일 때, 최댓값이 9이다.

답 9

개념 07. 치환을 이용한 이차함수의 최대, 최소

공통부분을 t로 치환하여 t에 대한 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다. 이때, 치환한 문자 t의 범위에 주의하자.

271 중요!

$x>0$일 때, 함수 $y=(x^2+2x)^2-6(x^2+2x)+3$이 $x=a$에서 최솟값 b를 가진다. ab의 값을 구하시오.

$X=x^2+2x$로 치환하면 $X=x^2+2x=(x+1)^2-1$이고 아래로 볼록한 이차함수의 그래프이므로 $x>0$이면 $X>0$이다. 주어진 함수는

$$y=X^2-6X+3=(X-3)^2-6$$

이므로 $X=3$일 때, 최솟값 -6을 가진다. 즉,

$$3=x^2+2x \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x+3)=0$$

에서 $x>0$이므로 $x=1$일 때, 최솟값 -6을 가진다. 즉, $a=1$, $b=-6$이므로 구하는 값은 $ab=-6$이다.

답 -6

272
다음 함수의 최솟값을 구하시오.

$$y=(x^2+4x+5)(x^2+4x+6)+3x^2+12x+14$$

$x^2+4x+5=t$로 치환하면

$$t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

이므로 $t\geq 1$이다. 이때, 주어진 함수를 t로 치환하면

$$\begin{aligned}y&=(x^2+4x+5)(x^2+4x+6)+3x^2+12x+14\\&=t(t+1)+3t-1\\&=t^2+4t-1=(t+2)^2-5\end{aligned}$$

이다. $t\geq 1$이므로 $t=1$일 때, 최솟값이 4이다.

답 4

개념 08. 조건식이 주어진 이차식의 최대, 최소

등식이 조건으로 주어졌을 때,
1. 주어진 등식을 한 문자에 대하여 푼다.
2. 1의 식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 이차식으로 나타낸다.
3. 2의 식에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다. 이때, 조건에서 주어진 범위에 주의하자.

273 중요!
직선 $y=x-4$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a, b)$에 대하여 a^2+b^2의 최솟값은? (단, $b\geq 0$)

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

$b=a-4$이고 $b=a-4\geq 0$이므로 $a\geq 4$이다. 또한

$$a^2+b^2=a^2+(a-4)^2=2a^2-8a+16=2(a-2)^2+8$$

이다. 이때, $a\geq 4$이므로 a^2+b^2은 $a=4$일 때, 최솟값 16을 가진다.

답 ⑤

274
등식 $2x+3y=7$을 만족시키는 양의 실수 x, y에 대하여 $(\sqrt{2x+6}+\sqrt{3y+7})^2$의 최댓값을 구하시오.

$x>0$, $y>0$이므로 $2x+6>0$, $3y+7>0$이다. 따라서

$$\sqrt{2x+6}\sqrt{3y+7}=\sqrt{(2x+6)(3x+7)}$$

이므로 주어진 식을 정리하면

$$(\sqrt{2x+6}+\sqrt{3y+7})^2=2x+6+3y+7+2\sqrt{(2x+6)(3y+7)}$$

이고 $2x+3y=7$에서 $3y=7-2x$를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}&2x+6+3y+7+2\sqrt{(2x+6)(3y+7)}\\&=20+4\sqrt{-x^2+4x+21}\\&=20+4\sqrt{-(x-2)^2+25}\end{aligned}$$

이다. 이때, $y>0$에서 $x<\frac{7}{2}$이므로 $0<x<\frac{7}{2}$에서 주어진 식의 최댓값은 $20+4\sqrt{25}=40$이다.

답 40

개념 09. 이차함수의 최대, 최소의 활용

1. 주어진 문제에서 미지수를 정하고 조건을 이용하여 식을 세운다.
2. 제한된 범위에서의 이차함수의 최대, 최소를 구한다. 이때, 문제에서 주어진 단위가 가진 범위에 주의하자.

275
지면으로부터 30 m의 높이에서 초속 20 m로 똑바로 위로 던질 때, t초 후의 공의 지면으로부터 높이를 y m라 하면

$$y=-5t^2+20t+30$$

의 관계식이 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때, 지면으로부터 높이는?

① 40 m ② 45 m ③ 50 m
④ 55 m ⑤ 60 m

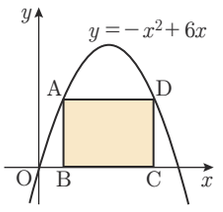
주어진 식은 t에 대한 이차함수이므로 표준형으로 변형하면

$$y=-5t^2+20t+30=-5(t-2)^2+50$$

이므로 함수 y는 $t=2$일 때, 최댓값 50을 가진다. 따라서 공은 2초 후에 50 m로 가장 높이 올라간다.

답 ③

276 중요!
오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD는 변 BC가 x축 위에 있고, 두 점 A, D가 함수 $y=-x^2+6x$의 그래프 위에 있다. 이때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값을 구하시오. (단, 두 점 A, D의 y좌표는 양수이다.)



점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<3)$이라 하면 세 점 A, C, D의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(a, -a^2+6a),\quad \mathrm{C}(6-a, 0),\quad \mathrm{D}(6-a, -a^2+6a)$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=(6-a)-a=6-2a$, $\overline{\mathrm{AB}}=-a^2+6a$ 이고, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$2(\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{AB}})=2(6-2a-a^2+6a)=-2(a-2)^2+20$$

이다. $0<a<3$이므로 $a=2$일 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20

답 20

277
어떤 대형 마트에서 800원에 판매하는 음료수가 매일 1600개씩 판매되고 있다. 이 음료수의 가격을 $4x$원씩 올릴 때마다 판매량은 $5x$개씩 줄어들다고 한다. 음료수 판매 하루 순이익이 매출액의 25 %라 할 때, 하루 순이익을 최대로 하는 음료수의 가격을 구하시오.

음료수가 $(800+4x)$원이면 판매량은 $(1600-5x)$개이므로 하루 순이익을 y원이라

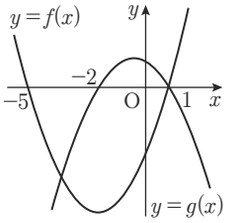
$$\begin{aligned}y&=\frac{25}{100}(800+4x)(1600-5x)=(200+x)(1600-5x)\\&=-5x^2+600x+320000=-5(x-60)^2+338000\end{aligned}$$

이다. 따라서 $x=60$일 때, 최대 순이익은 338000원이고 이때의 음료수의 가격은 $800+4\cdot 60=1040$원이다.

답 1040원

278

최고차항의 계수의 절댓값이 1인 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $f(x)-2g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 x좌표의 곱은?



① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

이차방정식 $f(x)=0$은 -5와 1을 두 근으로 가지고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로 이차항의 계수가 1이다. 따라서

$$f(x)=(x+5)(x-1)=x^2+4x-5 \quad \cdots ㉠$$

이다. 이차방정식 $g(x)=0$은 -2와 1을 두 근으로 가지고 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 이차항의 계수가 -1이다. 따라서

$$g(x)=-(x+2)(x-1)=-x^2-x+2 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡에 의하여 $f(x)-2g(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$이므로 함수 $f(x)-2g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 x좌표는 $x=1$ 또는 $x=-3$이고 그 곱은 -3이다.

답 ②

279

이차함수 $y=x^2-2ax-4$의 그래프와 직선 $y=2x-a^2$의 두 교점의 x좌표를 α, β라 하면 $|\alpha-\beta|=2$이다. 이때, 실수 a의 값을 구하시오.

이차함수 $y=x^2-2ax-4$의 그래프와 직선 $y=2x-a^2$의 두 교점의 x좌표 α, β는 x에 대한 이차방정식 $x^2-2ax-4=2x-a^2$, 즉 $x^2-(2a+2)x+(a^2-4)=0$의 두 근과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{(2a+2)^2-4(a^2-4)}}{|1|}=2$$

이다. 식을 정리하면 $(2a+2)^2-4(a^2-4)=4$이므로 $8a+16=0$에서 $a=-2$이다.

답 -2

280

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 다음 조건을 만족할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(가) $f(-3)=f(5)$
(나) $-4\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 18이다.

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 조건 (가)에 의하여 $f(-3)=f(5)$이므로 대칭축의 방정식은

$$x=\frac{-3+5}{2}=-\frac{a}{2}$$

에서 $a=-2$이다. 즉, $f(x)=x^2-2x+b=(x-1)^2+b-1$이고, 조건 (나)에 의하여 $-4\le x\le 4$에서 꼭짓점의 x좌표인 1에서 가장 먼 $x=-4$일 때 최댓값 18을 가진다. 따라서

$$f(-4)=(-4)^2-2\cdot(-4)+b=18$$

에서 $b=-6$이다.

답 $a=-2$, $b=-6$

281 마탑

이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)+4x=f(x)+4$를 만족한다. $-2\le x\le 2$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 8일 때, 최솟값을 구하시오.

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 (단, a, b, c는 실수이고 $a\neq 0$이다.)

$$f(x+2)+4x=a(x+2)^2+b(x+2)+c+4x$$
$$f(x)+4=ax^2+bx+c+4$$

이고, $f(x+2)+4x=f(x)+4$이므로

$$a(x+2)^2+b(x+2)+c+4x=ax^2+bx+c+4$$
$$\Rightarrow \quad 4(a+1)x+(4a+2b-4)=0$$

이다. 이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 항등식의 성질에 의하여 $a=-1$, $b=4$이다. 즉,

$$f(x)=-x^2+4x+c=-(x-2)^2+4+c$$

이다. 꼭짓점의 x좌표 2는 주어진 범위에 포함되므로 최댓값은 $x=2$일 때 $4+c=8$에서 $c=4$이다. 따라서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값이 -8이다.

답 -8

서술형

282

방정식 $x+y=4$를 만족시키는 음이 아닌 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2-2x+2의 최솟값과 최댓값을 각각 구하시오.

$x\geq 0$, $y\geq 0$에서 $y=4-x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 4$이다. 주어진 식을 x에 대하여 정리하면

$$x^2+y^2-2x+2=x^2+(4-x)^2-2x+2$$

$$=2x^2-10x+18=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$$

이므로 주어진 식은 $x=\frac{5}{2}$일 때, 최솟값이 $\frac{11}{2}$이고 $x=0$일 때, 최댓값이 18이다.

답 최솟값: $\frac{11}{2}$, 최댓값: 18

283

지면으로부터 높이가 a m인 건물 옥상에서 비스듬히 위쪽으로 공을 던질 때, t초 후 옥상으로부터 공의 높이를 y m라 하면 $y=-5t^2+20t+a$의 관계식이 성립한다. 이 공의 지면으로부터 최고높이가 45 m이고, $t=b$일 때 지면에 도착한다고 할 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

t초 후 지면으로부터 공의 높이는

$$y=-5t^2+20t+a=-5(t-2)^2+20+a$$

이므로 $t=2$일 때 지면으로부터 최고 높이 $20+a=45$를 가진다. 따라서 $a=25$이고

$$y=-5t^2+20t+25=-5(t+1)(t-5)$$

에서 $t\geq 0$이므로 공은 $t=5$일 때 지면에 도착한다. 따라서 $b=5$이고 구하는 값은 $\frac{a}{b}=\frac{25}{5}=5$이다.

답 5

284

$x-y^2=3$을 만족시키는 음이 아닌 실수 x, y에 대하여 x^2-y^2+3x-3의 최솟값을 구하시오.

y는 실수이므로

$$x-y^2=3 \quad \Rightarrow \quad y^2=x-3\geq 0$$

에서 $x\geq 3$이다. [40%]

$y^2=x-3$을 x^2-y^2+3x-3에 대입하면

$$x^2-y^2+3x-3=x^2+2x=(x+1)^2-1$$

이다. [20%]

이때, 이차함수 $y=(x+1)^2-1$의 꼭짓점의 x좌표 -1은 $x\geq 3$의 범위에 포함되지 않는다. 따라서 x^2-y^2+3x-3은 꼭짓점의 좌표와 가장 가까운 $x=3$일 때 최솟값이 15이다. [40%]

답 15

285

유리수 a, m, n에 대하여 이차함수 $y=x^2-2x+a$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 두 점 A, B에서 만나고, 점 A의 x좌표가 $2-3\sqrt{3}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

이차함수 $y=x^2-2x+a$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 두 교점의 x좌표는 x에 대한 이차방정식

$$x^2-2x+a=mx+n \quad \Rightarrow \quad x^2-(2+m)x+a-n=0$$

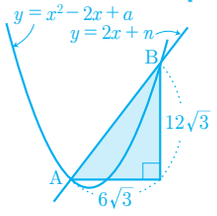
의 두 실근과 같다. 한 근이 $2-3\sqrt{3}$이고 이차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $2+3\sqrt{3}$이다. [30%]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+m=(2+3\sqrt{3})+(2-3\sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad m=2$$

이다. [20%]

두 점 A와 B의 x좌표의 차는 $6\sqrt{3}$이고, 직선의 기울기가 2이므로 y좌표의 차는 $2\cdot 6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$이다. [25%]



따라서 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2+(12\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{108+432}=\sqrt{540}=6\sqrt{15}$$

에서 $6\sqrt{15}$이다. [25%]

답 $6\sqrt{15}$

07 고차방정식

01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

1. 인수분해를 이용한 풀이

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리한 후, 인수분해 공식을 이용하여 푼다.

2. 인수정리를 이용한 풀이

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리한 후, $P(\alpha)=0$을 만족하는 α의 값을 찾고 조립제법을 이용하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$로 인수분해하여 푼다.

02 삼차방정식의 근과 계수의 관계

1. 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

2. 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

세 수 α, β, γ가 근이고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{\text{세 근의 합}})x^2+(\underbrace{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}_{\text{두 근끼리의 곱의 합}})x-\underbrace{\alpha\beta\gamma}_{\text{세 근의 곱}}=0$$

3. 삼차방정식의 켤레근

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

(1) a, b, c, d가 유리수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

(2) a, b, c, d가 실수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다.
(단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

03 방정식 $x^3=1$의 허근 ω의 성질

방정식 $\boldsymbol{x^3=1}$**의 한 허근**을 $\boldsymbol{\omega}$라 하면 다음을 만족한다. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

1. $\omega^3=\overline{\omega}^3=1,\quad \omega^2+\omega+1=\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

2. $\omega+\overline{\omega}=-1,\quad \omega\overline{\omega}=1$

3. $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega},\quad \overline{\omega}^2=\omega=\dfrac{1}{\overline{\omega}}$

마·타·노·트

▶ 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

주어진 방정식을 $P(x)=0$의 꼴로 정리하고, $P(x)$를 인수분해한 후, 다음과 같은 성질을 이용한다.

(1) $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$이다.

(2) $ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$이다.

▶ 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

이차방정식의 경우와 마찬가지로

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

이 x에 대한 삼차방정식일 때, $a\neq0$이다.

개념 확인

정답 및 풀이 p.35

[286 ~ 290] 다음 방정식을 푸시오.

286 $x^3-2x^2-5x+6=0$ $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)=0$
이므로 $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.

답 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

287 $x^4+x=0$ $x^4+x=x(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

답 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

288 $x^4-15x^2+10x+24=0$
$x^4-15x^2+10x+24=(x+4)(x+1)(x-2)(x-3)=0$이므로 $x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이다.

답 $x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

289 $x^4-4x^2-5=0$ $x^2=X$라 하면 주어진 식은
$X^2-4X-5=(X+1)(X-5)=(x^2+1)(x^2-5)=0$
이므로 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$이다.

답 $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$

290 $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$ $x^2+2x=X$라 하면 주어진 식은
$X^2-2X-3=(X+1)(X-3)=(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)$
$=(x+1)^2(x+3)(x-1)=0$
이므로 $x=-1$(중근) 또는 $x=-3$ 또는 $x=1$이다.

답 $x=-1$ (중근) 또는 $x=-3$ 또는 $x=1$

[291 ~ 293] 삼차방정식 $x^3+5x^2-4x+3=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

291 $\alpha+\beta+\gamma$ $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{5}{1}=-5$

답 -5

292 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-4}{1}=-4$

답 -4

293 $\alpha\beta\gamma$ $\alpha\beta\gamma=-\frac{3}{1}=-3$

답 -3

[294 ~ 296] 다음 조건을 만족하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

294 세 근이 -2, 2, 4
삼차방정식의 근을 $\alpha=-2$, $\beta=2$, $\gamma=4$라 할 때, 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=4$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$
$\alpha\beta\gamma=-16$
이므로 구하는 삼차방정식은 $x^3-4x^2-4x+16=0$이다.

답 $x^3-4x^2-4x+16=0$

295 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 2, $1+\sqrt{2}$ (단, a, b, c는 유리수) 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 나머지 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다. 세 근을 α, β, γ라 할 때, 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a=-(\alpha+\beta+\gamma)=-4$
$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$
$c=-\alpha\beta\gamma=2$
이므로 구하는 삼차방정식은 $x^3-4x^2+3x+2=0$이다.

답 $x^3-4x^2+3x+2=0$

296 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 1, $-2+3i$ (단, a, b, c는 실수) 삼차방정식의 계수가 실수이고 허근을 가지므로 나머지 한 근은 $-2-3i$이다. 세 근을 α, β, γ라 할 때, 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a=-(\alpha+\beta+\gamma)=3$
$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9$
$c=-\alpha\beta\gamma=-13$
이므로 구하는 삼차방정식은 $x^3+3x^2+9x-13=0$이다.

답 $x^3+3x^2+9x-13=0$

[297 ~ 299] 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

297 $\omega^2+\omega$ ω는 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이므로
$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$
에서 $\omega^2+\omega=-1$이다.

답 -1

298 $\overline{\omega}-\frac{1}{\omega}$ $\omega^2=\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$이므로 $\overline{\omega}-\frac{1}{\omega}=0$이다.

답 0

299 $\omega^{12}+\omega^7+\omega^5+1$ $\omega^3=1$이므로
$\omega^{12}+\omega^7+\omega^5+1=(\omega^3)^4+(\omega^3)^2\cdot\omega+(\omega^3)\cdot\omega^2+1$
$=(1+\omega+\omega^2)+1=1$

답 1

개념 적용

개념 01. 고차방정식의 풀이

1. 인수분해 공식을 이용하여 푼다.
2. 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해하여 푼다.
3. 공통부분이 있는 경우 치환하거나,
 식을 변형하여 공통부분을 만들어 치환하여 푼다.
4. 복이차식의 경우 $x^2=X$로 치환한 후 인수분해하여 푼다.
5. $A^2-B^2=0$의 꼴로 변형한 후 인수분해하여 푼다.

300 중요!

삼차방정식 $(x-1)x^2=(x-1)(2x-3)$의 허근은?
(단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① $1\pm i$ ② $1\pm\sqrt{2}i$ ③ $1\pm\sqrt{3}i$
④ $1\pm 2i$ ⑤ $1\pm\sqrt{5}i$

주어진 식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$(x-1)x^2-(x-1)(2x-3)=(x-1)(x^2-2x+3)=0$$

이다. 이때 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 해를 구하면

$$x=1\pm\sqrt{(-1)^2-3}=1\pm\sqrt{2}i$$

이다. 따라서 주어진 삼차방정식의 허근은 $1\pm\sqrt{2}i$이다.

답 ②

301

x에 대한 삼차방정식 $x^3+kx^2+x+6=0$의 세 근이 -1, a, b일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

$f(x)=x^3+kx^2+x+6$이라 할 때, 주어진 삼차방정식의 한 근이 -1이므로

$$f(-1)=-1+k-1+6=0 \quad \Rightarrow \quad k=-4$$

이다. 조립제법을 이용하여 삼차식 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

에서 $f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-3)$이다. 따라서 나머지 두 근은 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 구하는 값은 $a^2+b^2=2^2+3^2=13$이다.

답 13

302

사차방정식 $x^4+3x^3+3x^2+5x-12=0$의 두 실근의 곱을 p라 하고 두 허근의 곱을 q라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.

$f(x)=x^4+3x^3+3x^2+5x-12$라 할 때, $f(1)=0$, $f(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	3	3	5	-12
		1	4	7	12
-3	1	4	7	12	0
		-3	-3	-12	
	1	1	4	0	

에서 $f(x)=(x-1)(x+3)(x^2+x+4)$이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 1, -3이므로 $p=-3$이다. 한편 방정식 $f(x)=0$의 두 허근은 이차방정식 $x^2+x+4=0$의 두 근과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $q=4$이다. 따라서 구하는 값은 $p^2+q^2=(-3)^2+4^2=25$이다.

답 25

303

사차방정식 $(x^2+2x+3)(x^2+2x+4)-20=0$의 두 허근의 곱을 구하시오.

$x^2+2x=X$로 치환하면 주어진 방정식은

$$(X+3)(X+4)-20=0$$

$$X^2+7X-8=(X+8)(X-1)=0$$

이다. 따라서 $X=-8$ 또는 $X=1$이다.

(i) $X=-8$일 때, $X=x^2+2x$를 대입하여 정리하면
$x^2+2x+8=0$이고 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=-1\pm\sqrt{7}i$이다.

(ii) $X=1$일 때, $X=x^2+2x$를 대입하여 정리하면 $x^2+2x-1=0$이고
이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=-1\pm\sqrt{2}$이고 이는 실근이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 허근은 $x=-1\pm\sqrt{7}i$이므로 두 허근의 곱은 $(-1+\sqrt{7}i)(-1-\sqrt{7}i)=8$이다.

답 8

304

사차방정식 $x^4-22x^2+9=0$을 푸시오.

사차방정식의 좌변에서 이차항을 $-22x^2=-6x^2-16x^2$으로 분리하여 인수분해하면

$$x^4-22x^2+9=(x^2-3)^2-16x^2=0$$

$$(x^2-4x-3)(x^2+4x-3)=0$$

이다. 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 각각의 해를 구하면

(i) $x^2-4x-3=0$에서 $x=2\pm\sqrt{7}$이다.

(ii) $x^2+4x-3=0$에서 $x=-2\pm\sqrt{7}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{7}$이다.

답 $x=2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{7}$

305 중요!

사차방정식 $x(x-2)(x+2)(x-4)+15=0$의 양의 실근의 합을 구하시오.

주어진 방정식의 좌변을 공통부분이 생기도록 전개하면

$$(x^2-2x)(x^2-2x-8)+15=0$$

이므로 $x^2-2x=X$로 치환하면

$$X(X-8)+15=0 \quad \Rightarrow \quad X^2-8X+15=(X-3)(X-5)=0$$

이다. 따라서 $X=3$ 또는 $X=5$이다.

(i) $X=3$일 때, $X=x^2-2x$를 대입하여 정리하면
$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$이므로 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

(ii) $X=5$일 때, $X=x^2-2x$를 대입하여 정리하면 $x^2-2x-5=0$이고
이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=1\pm\sqrt{6}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 양의 실근의 합은 $3+(1+\sqrt{6})=4+\sqrt{6}$이다.

답 $4+\sqrt{6}$

개념 02. 근의 조건이 주어진 삼차방정식

삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$의 꼴로 변형한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

306 중요

x에 대한 삼차방정식 $x^3-5x^2+(k+4)x-k=0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^3-5x^2+(k+4)x-k$라 할 때, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 삼차식 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	−5	$k+4$	$-k$
		1	−4	k
	1	−4	k	0

에서 $f(x)=(x-1)(x^2-4x+k)$이다. 이때 주어진 삼차방정식이 허근을 가지면 x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+k=0$도 허근을 가진다. 따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=(-2)^2-k<0$에서 $k>4$이다.

답 $k>4$

307

x에 대한 삼차방정식 $x^3+4x^2+(a+3)x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 정수 a의 최댓값을 구하시오.

$f(x)=x^3+4x^2+(a+3)x+a$라 할 때, $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 삼차식 $f(x)$를 인수분해하면

−1	1	4	$a+3$	a
		−1	−3	$-a$
	1	3	a	0

에서 $f(x)=(x+1)(x^2+3x+a)$이다. 이때 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가지므로 다음의 두 조건을 만족한다.

(i) 이차방정식 $x^2+3x+a=0$은 -1을 근으로 가지지 않는다. 즉, $1-3+a\neq0$에서 $a\neq2$이다.

(ii) 이차방정식 $x^2+3x+a=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=3^2-4a>0$에서 $a<\frac{9}{4}$이다.

(i), (ii)에 의하여 $a\neq2$이고 $a<\frac{9}{4}$이므로 구하는 정수 a의 최댓값은 1이다.

308

답 1

x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a-4)x-2a=0$이 중근을 가질 때, 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

$f(x)=x^3+(a-4)x-2a$라 할 때, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 삼차식 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	0	$a-4$	$-2a$
		2	4	$2a$
	1	2	a	0

에서 $f(x)=(x-2)(x^2+2x+a)$이다. 이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지는 경우는 다음과 같다.

(i) x에 대한 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 한 근이 2인 경우 $4+4+a=0$에서 $a=-8$이다.

(ii) x에 대한 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 중근을 가지는 경우 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1^2-a=0$에서 $a=1$이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 $-8+1=-7$이다.

답 −7

개념 03. 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

309 중요

삼차방정식 $x^3+4x^2+8x-3=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 11

④ 14 ⑤ 18

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-4,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=8,\quad \alpha\beta\gamma=3$$

이므로 식을 전개하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)\\&=\alpha\beta\gamma+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+8\\&=3+16-16+8=11\end{aligned}$$

답 ③

310

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2-5bx+6=0$의 세 근이 1, 3, k일 때, abk의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

주어진 삼차방정식의 세 근이 1, 3, k이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+3+k=-a \Rightarrow a+k=-4$$
$$3+3k+k=-5b \Rightarrow 5b+4k=-3$$
$$1\cdot3\cdot k=-6 \Rightarrow k=-2$$

이므로 $a=-2$, $b=1$, $k=-2$이다. 따라서 구하는 값은

$$abk=-2\cdot1\cdot(-2)=4$$

답 4

311

x에 대한 삼차방정식 $x^3+14x^2+ax+b=0$의 세 근의 비가 1:2:4일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 104 ② 108 ③ 112

④ 116 ⑤ 120

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 4α (단, $\alpha\neq0$)라 하자. 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+2\alpha+4\alpha=-14 \Rightarrow \alpha=-2$$

이므로 세 근은 -2, -4, -8이다. 따라서

$$-2\cdot(-4)-4\cdot(-8)-8\cdot(-2)=a,\quad -2\cdot(-4)\cdot(-8)=-b$$

에서 $a=56$, $b=64$이고 구하는 값은 $a+b=56+64=120$이다.

답 ⑤

개념 04. 세 수를 근으로 하는 삼차방정식

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$
$$\Longleftrightarrow \quad x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

312 중요!

삼차방정식 $x^3-4x^2+6x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하시오.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6$, $\alpha\beta\gamma=-2$이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$을 세 근으로 하는 삼차방정식에 대하여

$$(\text{세 근의 합})=(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)=\alpha+\beta+\gamma-3=1$$
$$(\text{두 근의 곱의 합})=(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)(\gamma-1)+(\gamma-1)(\alpha-1)$$
$$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-2(\alpha+\beta+\gamma)+3=1$$
$$(\text{세 근의 곱})=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$$
$$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1=-5$$

이다. 따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-x^2+x+5=0$이다.

답 $x^3-x^2+x+5=0$

313

x에 대한 삼차방정식 $2x^3+ax^2+bx+c=0$이 -1, 2, 3을 세 근으로 가질 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$라 할 때, 방정식 $f(x)=0$이 -1, 2, 3을 세 근으로 가지므로, $f(x)=2(x+1)(x-2)(x-3)$이다. 따라서

$$2x^2+ax^2+bx+c=2(x+1)(x-2)(x-3)$$

이고 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2+a+b+c=8$$

에서 $a+b+c=6$이다.

답 ④

314

삼차방정식 $x^3+4x-8=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은?

① $x^3-4x-8=0$ ② $x^3-4x+8=0$
③ $x^3+4x+8=0$ ④ $x^3-8x+16=0$
⑤ $x^3+8x+16=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \quad \alpha\beta\gamma=8$$

에서 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$는 각각 $-\gamma$, $-\alpha$, $-\beta$와 같다. 따라서 구하는 삼차방정식에 대하여

$$(\text{세 근의 합})=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$
$$(\text{두 근의 곱의 합})=\gamma\alpha+\alpha\beta+\beta\gamma=4$$
$$(\text{세 근의 곱})=-\alpha\beta\gamma=-8$$

이므로 구하는 삼차방정식은 $x^3+4x+8=0$이다.

답 ③

개념 05. 삼차방정식의 켤레근

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

1. a, b, c, d가 유리수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)
2. a, b, c, d가 실수일 때, 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다.(단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

315 중요!

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 -2, $1-3i$일 때, 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 14 ② 18 ③ 22
④ 26 ⑤ 30

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1-3i$이므로 $1+3i$도 근이다. 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a=-2+(1-3i)+(1+3i) \quad \Rightarrow \quad a=0$$
$$b=-2(1-3i)+(1-3i)(1+3i)-2(1+3i)=6$$
$$-c=-2(1-3i)(1+3i)=-2(1-9i^2)=-20 \quad \Rightarrow \quad c=20$$

이므로 구하는 값은 $a+b+c=26$이다.

답 ④

316

x에 대한 삼차방정식 $x^3-4x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3-\sqrt{5}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

a, b가 모두 유리수이고 한 근이 $3-\sqrt{5}$이므로 $3+\sqrt{5}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=4 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-2$$

이다. 주어진 삼차방정식의 세 근이 -2, $3-\sqrt{5}$, $3+\sqrt{5}$이므로

$$a=-2(3-\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})-2(3+\sqrt{5})=-8$$
$$b=-(-2)\cdot(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})=8$$

이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=0$이다.

답 ③

317

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+7x+b=0$의 한 근이 $\dfrac{25}{(2-i)^2}$일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$)

복소수의 연산에 의하여

$$\frac{25}{(2-i)^2}=\frac{25}{3-4i}=\frac{25(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=3+4i$$

이다. 즉, $3+4i$가 주어진 삼차방정식의 한 근이고 a, b가 실수이므로 $3-4i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 할 때, 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+4i)(3-4i)+\alpha(3-4i)+\alpha(3+4i)=7 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-3$$

이다. 주어진 삼차방정식의 세 근이 -3, $3+4i$, $3-4i$이므로

$$a=-\{-3+(3+4i)+(3-4i)\}=-3$$
$$b=-(-3)\cdot(3+4i)\cdot(3-4i)=75$$

이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=72$이다.

답 72

개념 06. 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 다음을 만족한다.
(단, $\overline{\omega}$는 켤레복소수이다.)

1. $\omega^3=\overline{\omega}^3=1$, $\omega^2+\omega+1=\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
2. $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
3. $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$, $\overline{\omega}^2=\omega=\dfrac{1}{\overline{\omega}}$

318 중요

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{30}+\omega^{20}+\omega^{10}$의 값은?

① ω ② ω^2 ③ ω^2+1
④ 0 ⑤ 1

$x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이 성립한다. 따라서 구하는 값은

$$\omega^{30}+\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^{10}+(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega$$
$$=1+\omega^2+\omega=0$$

답 ④

319

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\dfrac{1}{\omega+1}+\dfrac{1}{\overline{\omega}+1}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

$x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. 이때 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 모든 계수가 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이다. 따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\overline{\omega}+1}=\frac{\omega+\overline{\omega}+2}{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}=\frac{(\omega+\overline{\omega})+2}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}$$
$$=\frac{-1+2}{1-1+1}=1$$

답 1

320

삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때,

$$1-\omega+\omega^2-\omega^3+\cdots+\omega^{98}-\omega^{99}$$

의 값을 구하시오.

$x^3=-1$에서 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이 성립한다. 주어진 식을 세 항씩 묶어 계산하면

$$1-\omega+\omega^2-\omega^3+\cdots+\omega^{98}-\omega^{99}$$
$$=(1-\omega+\omega^2)-(\omega^3)(1-\omega+\omega^2)+(\omega^3)^2(1-\omega+\omega^2)-\cdots$$
$$+(\omega^3)^{32}(1-\omega+\omega^2)-(\omega^3)^{33}$$
$$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{33\text{개}}-(-1)^{33}=1$$

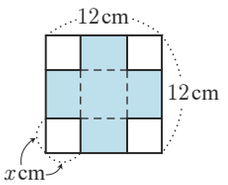
답 1

개념 07. 고차방정식의 활용

1. 구하려는 것을 미지수로 놓고 조건에 맞게 방정식을 세운다.
2. 방정식을 풀어 해를 구한다.
3. 구한 해가 조건에 맞는지 확인한다.

321 중요

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이가 12 cm인 정사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 한 변의 길이가 x cm인 정사각형을 잘라 낸 후 점선을 따라 접어서 부피가 64 cm^3인 상자를 만들려고 할 때, x의 값을 모두 구하시오.



상자의 가로와 세로의 길이는 $(12-2x)$ cm이고 높이는 x cm이므로

$$(12-2x)^2x=64 \Rightarrow x^3-12x^2+36x-16=0$$

이다. $f(x)=x^3-12x^2+36x-16$이라 할 때, $f(4)=0$이므로 $f(x)$를 인수분해하면 $f(x)=(x-4)(x^2-8x+4)$이다. 삼차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=4$ 또는 $x=4\pm2\sqrt{3}$이고 $12-2x>0$에서 $0<x<6$이므로 구하는 x의 값은 $x=4$ 또는 $x=4-2\sqrt{3}$이다.

답 $x=4$ 또는 $x=4-2\sqrt{3}$

322

가로, 세로, 높이의 길이가 각각 2, 3, 7인 직육면체에서 가로, 세로의 길이를 x만큼 늘이고 높이를 x만큼 줄일 때, 처음 직육면체의 부피와 같았다. 양수 x의 값은?

① $1+\sqrt{22}$ ② $1+2\sqrt{6}$ ③ $1+\sqrt{26}$
④ $1+2\sqrt{7}$ ⑤ $1+\sqrt{30}$

가로, 세로의 길이를 x만큼 늘이고 높이를 x만큼 줄인 직육면체의 부피가 처음 직육면체의 부피 $2\cdot3\cdot7=42$와 같으므로

$$(2+x)(3+x)(7-x)=42 \Rightarrow x^3-2x^2-29x=0$$

이다. 따라서 삼차방정식 $x^3-2x^2-29x=0$을 풀면

$$x(x^2-2x-29)=0$$

에서 $x=0$ 또는 $x=1\pm\sqrt{(-1)^2+29}=1\pm\sqrt{30}$이다. 이때 $0<x<7$이므로 구하는 x의 값은 $1+\sqrt{30}$이다.

답 ⑤

323

가로, 세로의 길이의 차가 4이고 가로, 세로의 길이의 합이 높이의 길이와 같은 직육면체의 부피가 6일 때, 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구하시오.

직육면체의 가로의 길이를 x라 하고 세로의 길이를 $x+4$라 하면 직육면체의 높이의 길이는 $2x+4$이다. 이 직육면체의 부피가 6이므로

$$x(x+4)(2x+4)=6 \Rightarrow x^3+6x^2+8x-3=0$$

이다. $f(x)=x^3+6x^2+8x-3$이라 할 때, $f(-3)=0$이므로 $f(x)$를 인수분해하면 $f(x)=(x+3)(x^2+3x-1)$이다. 이때 삼차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$이고 $x>0$이므로 $x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$이다. 따라서 구하는 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$$4\{x+(x+4)+(2x+4)\}=16x+32=8+8\sqrt{13}$$

답 $8+8\sqrt{13}$

324

사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x-2)-3=0$의 모든 허근의 합을 구하시오.

주어진 식을 공통부분이 나타나도록 전개하여 정리하면

$$x(x-1)(x+1)(x-2)-3=(x^2-x)(x^2-x-2)-3=0$$

에서 $x^2-x=X$로 치환하면

$$X(X-2)-3=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)=0$$

이므로 $X=-1$ 또는 $X=3$이다.

(i) $X=-1$일 때, $x^2-x+1=0$이다. 이 이차방정식의 판별식 D에 대하여

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 가지고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 합은 1이다.

(ii) $X=3$일 때, $x^2-x-3=0$이다. 이 이차방정식의 판별식 D에 대하여

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3)=13>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 사차방정식의 모든 허근의 합은 1이다.

답 1

325

x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a+2)x^2+bx-48=0$의 세 실근의 비가 $1:2:3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 3α ($\alpha\neq0$인 실수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\cdot2\alpha\cdot3\alpha=6\alpha^3=48$에서

$$\alpha^3-8=(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)=0$$

이다. 이때 α에 대한 이차방정식 $\alpha^2+2\alpha+4=0$이 실근을 가지지 않으므로 $\alpha=2$이고 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+2\alpha+3\alpha=-a-2 \quad\Rightarrow\quad a=-14$$

$$\alpha\cdot2\alpha+2\alpha\cdot3\alpha+3\alpha\cdot\alpha=b \quad\Rightarrow\quad b=44$$

이므로 구하는 값은 $a+b=30$이다.

답 30

326 마타

최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$에 대하여

$$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=4$$

이고 방정식 $f(x)=0$의 세 근의 곱이 16일 때, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하시오. (단, α, β, γ는 서로 다른 수이다.)

삼차식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=4$이므로

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+4$$

이다. 우변을 전개하여 정리하면

$$f(x)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma+4$$

이므로 방정식 $f(x)=0$의 세 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta\gamma-4=16$

이므로 $\alpha\beta\gamma=20$이다.

답 20

327

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근의 합이 15일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 세 근의 합을 구하시오.

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 실수 a ($a\neq0$)에 대하여

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이므로

$$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)(4x-3-\gamma)$$

로 놓을 수 있다. 따라서 방정식 $f(4x-3)=0$의 세 근은

$$x=\frac{\alpha+3}{4} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+3}{4} \text{ 또는 } x=\frac{\gamma+3}{4}$$

이다. 문제의 조건에서 $\alpha+\beta+\gamma=15$이므로 방정식 $f(4x-3)=0$의 세 근의 합은

$$\frac{\alpha+3}{4}+\frac{\beta+3}{4}+\frac{\gamma+3}{4}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+9}{4}=\frac{15+9}{4}=6$$

답 6

328

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, **[보기]**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $(1+\omega^2)^4=-\omega$

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $(1-\omega)^{3n}=1$

ㄷ. $\omega^9+\omega^8-\omega^7+2=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$이고 $\omega^3=-1$이다.

ㄱ. (참) $(1+\omega^2)^4=\omega^4=\omega^3\cdot\omega=-\omega$

ㄴ. (거짓) $(1-\omega)^{3n}=(-\omega^2)^{3n}=(-\omega^6)^n=(-1)^n$이므로 n이 홀수일 때, $(1-\omega)^{3n}=-1$이다.

ㄷ. (참) $\omega^9+\omega^8-\omega^7+2=(\omega^3)^3+(\omega^3)^2\cdot\omega^2-(\omega^3)^2\cdot\omega+2$

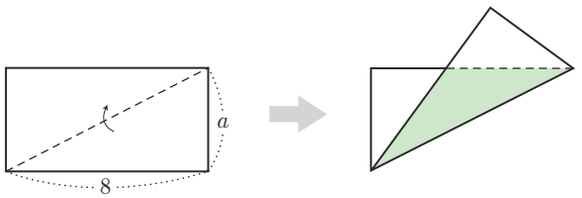
$=-1+\omega^2-\omega+2=\omega^2-\omega+1=0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

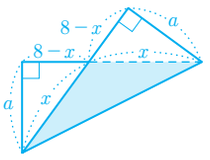
답 ③

329 기출

그림과 같이 가로와 세로의 길이가 각각 8, a인 직사각형 모양의 종이를 대각선을 따라 접어 겹쳐진 부분의 넓이가 10일 때, a의 값은? (단, $0<a<8$)



오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 종이를 대각선을 따라 접었을 때, 겹쳐지지 않은 두 직각삼각형은 합동이다. 이때, 두 직각삼각형의 빗변의 길이를 x라 하면 다른 두 변의 길이는 각각 $8-x$, a이다. 피타고라스의 정리에 의하여



$$x^2=a^2+(8-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a^2+64}{16} \quad \cdots ㉠$$

이다. 한편, 겹쳐진 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}ax=10$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$$\frac{1}{2}ax=10 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\times a\times\frac{a^2+64}{16}=10$$

$$\Rightarrow \quad a^3+64a-320=(a-4)(a^2+4a+80)=0$$

이다. 이때 이차방정식 $a^2+4a+80=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=4-80=-76<0$이므로 서로 다른 두 허근을 가진다. 따라서 구하는 a의 값은 4이다.

답 4

서술형

330

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2-a-1=0$이 중근을 가지도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

$f(x)=x^3+ax^2-a-1$이라 할 때, $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가진다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	a	0	$-a-1$
		1	$a+1$	$a+1$
	1	$a+1$	$a+1$	0

에서 구하는 삼차방정식은

$$f(x)=x^3+ax^2-a-1=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+1\}=0$$

이고 $x=1$ 또는 $x^2+(a+1)x+a+1=0$이다. [30%]

(i) $x=1$이 x에 대한 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+1=0$의 근일 경우

$$1+(a+1)+a+1=2a+3=0$$

이므로 $a=-\frac{3}{2}$이다. [30%]

(ii) x에 대한 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+1=0$이 중근을 가질 경우

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+1)^2-4(a+1)=(a+1)(a-3)=0$$

이므로 $a=-1$ 또는 $a=3$이다.

..... [30%]

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{3}{2}\cdot(-1)\cdot3=\frac{9}{2}$이다. [10%]

답 $\frac{9}{2}$

331

x에 대한 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2-3x+1=0$의 네 근이 -1, 1, α, β일 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 실수이다.)

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2-3x+1$이라 하면 $f(-1)=f(1)=0$이므로

$$f(-1)=1-a+b+3+1=0 \quad \Rightarrow \quad -a+b=-5 \quad \cdots ㉠$$

$$f(1)=1+a+b-3+1=0 \quad \Rightarrow \quad a+b=1 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$이므로

$$f(x)=x^4+3x^3-2x^2-3x+1$$

이다. [20%]

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	3	−2	−3	1
		1	4	2	−1
−1	1	4	2	−1	0
		−1	−3	1	
	1	3	−1	0	

에서 $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+3x-1)$이다. [30%]

따라서 방정식 $f(x)=0$의 네 근 중에서 α, β는 이차방정식 $x^2+3x-1=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$이다.

..... [30%]

따라서 곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 값은

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-3)^2-4\cdot(-1)=13$$

이다. [20%]

답 13

08 연립방정식

01 연립일차방정식

1. **미지수가 2개인 연립일차방정식**의 풀이
 두 개의 미지수 중 한 개를 소거하여 미지수의 값을 구한 뒤 하나의 식에 대입하여 다른 미지수의 값을 구한다.
2. **미지수가 3개인 연립일차방정식**의 풀이
 하나의 미지수를 소거한 뒤 식이나 값을 대입하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 푼다.

02 연립이차방정식

1. **일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식**의 풀이
 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.
2. **두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식**의 풀이
 (1) 이차식을 인수분해할 수 있는 경우
 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식으로 바꾸어 푼다.
 (2) 이차식을 인수분해할 수 없는 경우
 1) 이차항을 모두 소거할 수 있는 경우, 이차항을 소거하여 얻은 일차방정식을 주어진 이차방정식에 대입하여 푼다.
 2) 이차항을 모두 소거할 수 없는 경우, 상수항을 소거한 후 얻은 이차식을 인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 주어진 이차방정식에 각각 대입하여 푼다.
3. **$x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식**의 풀이
 (1) $x+y=u$, $xy=v$로 두고 연립방정식을 풀어서 u, v의 값을 구한다.
 (2) 두 근이 x, y인 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$을 풀어서 x, y의 값을 구한다.

03 부정방정식과 공통근

1. **부정방정식**: 미지수보다 방정식의 수가 적어서 **무수히 많은 해를 가지는 방정식**
2. **부정방정식의 풀이**
 (1) 해의 범위가 정수일 때: (다항식 A)×(다항식 B)=(정수)의 꼴로 변형한다.
 (2) 해의 범위가 실수일 때
 1) 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용하여 푼다.
 2) 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 판별식 $D\geq 0$임을 이용하여 푼다.
3. **공통근**
 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근을 α라 하면 두 방정식 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$을 연립하여 풀어서 α의 값을 구한다.

마·타·노·트

▶ **$x+y$, xy로 표현가능한 식**
두 문자 x, y로 이루어진 식 중에서 x, y의 자리를 바꾸어도 식이 변하지 않으면 그 식을 $x+y$, xy로 표현할 수 있다.

▶ **절댓값의 성질과 부정방정식**
실수 A, B에 대하여 $|A|+|B|=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용하여 푼다.

정답 및 풀이 p.41

[332 ~ 333] 다음 연립방정식을 푸시오.

332 $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots ㉠ \\ x-2y=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠×2−㉡을 하면

$3x=9$에서 $x=3$이고 이를 ㉠에 대입하면 $y=1$이다.

답 $(x, y)=(3, 1)$

333 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=2 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots ㉠ \\ x-y-z=2 & \cdots ㉡ \\ x-y+z=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠+㉡을 하면

$2x=8$에서 $x=4$이고 ㉠−㉢을 하면 $2y=6$에서 $y=3$이다. $x=4$, $y=3$을 ㉠에 대입하면 $z=-1$이다.

답 $(x, y, z)=(4, 3, -1)$

[334 ~ 339] 다음 연립방정식을 푸시오.

334 $\begin{cases} y=x-3 \\ xy=4 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x-3 & \cdots ㉠ \\ xy=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠을 ㉡에 대입하면

$x(x-3)=4$에서 $(x+1)(x-4)=0$이다. 따라서 $x=-1$ 또는 $x=4$이고 이를 각각 ㉠에 대입하여 연립방정식의 해를 구하면 $(x, y)=(4, 1), (-1, -4)$이다.

답 $(x, y)=(4, 1), (-1, -4)$

335 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠을 x에 대하여 정리하면 $x=y+2$이고 이를 ㉡에 대입하면 $(y+2)^2+y^2=10$에서 $(y-1)(y+3)=0$이므로 $y=1$ 또는 $y=-3$이다. 이것을 ㉠에 대입하여 연립방정식의 해를 구하면 $(x, y)=(3, 1), (-1, -3)$이다.

답 $(x, y)=(3, 1), (-1, -3)$

336 $\begin{cases} (x-y)(x-2y)=0 \\ x^2-xy+y^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-y)(x-2y)=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=9 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

㉠에서 $x=y$ 또는 $x=2y$이다.

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2-y^2+y^2=9$에서 $y^2=9$이므로 $y=\pm 3$이다. 따라서 $(x, y)=(3, 3), (-3, -3)$이다.

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면 $4y^2-2y^2+y^2=9$에서 $y^2=3$이므로 $y=\pm\sqrt{3}$이다. 따라서 $(x, y)=(2\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$이다.

답 $(x, y)=(2\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (3, 3), (-3, -3)$

337 $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 3y^2-xy=16 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots ㉠ \\ 3y^2-xy=16 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

㉠에서 $x=y$ 또는 $x=-y$이다.

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $3y^2-y^2=16$에서 $y^2=8$이므로 $y=\pm 2\sqrt{2}$이다. 따라서 $(x, y)=(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$이다.

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면 $3y^2+y^2=16$에서 $y^2=4$이므로 $y=\pm 2$이다. 따라서 $(x, y)=(2, -2), (-2, 2)$이다.

답 $(x, y)=(2, -2), (-2, 2), (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

338 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ x^2+y^2-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2-2y=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

㉠−㉡을 하면 $2x+2y=2$에서 $y=-x+1$이다. 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+(-x+1)^2+2x=3 \Rightarrow x^2=1$$

에서 $x=1$ 또는 $x=-1$이다. $x=1$일 때, $y=0$이고 $x=-1$일 때, $y=2$

이므로 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, 0), (-1, 2)$이다.

답 $(x, y)=(1, 0), (-1, 2)$

339 $\begin{cases} x+y=6 \\ 2xy=10 \end{cases}$ $x+y=6$, $xy=5$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2-6t+5=0$의 두 근이다. $(t-1)(t-5)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=5$이므로 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, 5), (5, 1)$이다.

답 $(x, y)=(1, 5), (5, 1)$

[340 ~ 344] 다음 물음에 답하시오.

340 방정식 $x(y+2)=-2$를 만족시키는 두 정수 x, y의 값을 모두 구하시오. 주어진 방정식에서 x, y가 모두 정수이므로

x	1	2	−1	−2
$y+2$	−2	−1	2	1

$\Rightarrow$

x	1	2	−1	−2
y	−4	−3	0	−1

에서 방정식의 해는 $(x, y)=(1, -4), (2, -3), (-1, 0), (-2, -1)$이다.

답 $(x, y)=(1, -4), (2, -3), (-1, 0), (-2, -1)$

341 방정식 $(x+y-3)\sqrt{2}+(2x-y)=0$을 만족시키는 두 유리수 x, y의 값을 각각 구하시오. 주어진 등식에서 $x+y-3$, $2x-y$가 유리수이므로 무리수가 같을 조건에 의하여 $x+y-3=0$, $2x-y=0$이고 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$이다.

답 $x=1$, $y=2$

342 방정식 $x^2+y^2+2x-4y+5=0$을 만족시키는 두 실수 x, y의 값을 각각 구하시오. 주어진 방정식에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=0$이고 $x+1$, $y-2$가 모두 실수이므로 $(x+1)^2\geq 0$, $(y-2)^2\geq 0$이다. 따라서 $x+1=0$, $y-2=0$이므로 구하는 값은 $x=-1$, $y=2$이다.

답 $x=-1$, $y=2$

343 두 이차방정식 $x^2-4x+3=0$, $x^2+2x-15=0$의 공통근을 구하시오. $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$이므로 $x=1$ 또는 $x=3$이고 $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=-5$이다.

따라서 주어진 두 이차방정식의 공통근은 3이다.

답 3

344 x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+4=0$, $x^2-2x+b=0$의 공통근이 -1일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

$x^2+ax+4=0$이 $x=-1$을 근으로 가지므로 $1-a+4=0$에서 $a=5$이고

$x^2-2x+b=0$이 $x=-1$을 근으로 가지므로 $1+2+b=0$에서 $b=-3$이다.

답 $a=5$, $b=-3$

개념 적용

개념 01. 연립일차방정식

1. 미지수가 2개인 연립일차방정식: 하나의 미지수를 소거하여 값을 구한 뒤 대입하여 다른 미지수의 값을 구한다.
2. 미지수가 3개인 연립일차방정식: 하나의 미지수를 소거하여 1처럼 푼다.

345 중요

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=-1 \\ ax-2by=11 \end{cases}$의 해가 $(x, y)=(1, 2)$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} ax+by=-1 & \cdots ㉠ \\ ax-2by=11 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠과 ㉡에 각각 $(x, y)=(1, 2)$를 대입하면 a, b에 대한 연립방정식 $\begin{cases} a+2b=-1 & \cdots ㉢ \\ a-4b=11 & \cdots ㉣ \end{cases}$ 이 된다. ㉢−㉣을 하여 a를 소거하면 $b=-2$이고 이를 ㉢에 대입하면 $a=3$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=3+(-2)=1$이다.

답 ②

346

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=4 \\ z+x=8 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ y+z=4 & \cdots ㉡ \\ z+x=8 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠−㉡을 하면

$$x-z=-2 \quad \cdots ㉣$$

이다. ㉢과 ㉣을 연립하여 풀면 $x=3$, $z=5$이고 이를 ㉠에 대입하면 $y=-1$이다. 따라서 $\alpha=3$, $\beta=-1$, $\gamma=5$이고 구하는 값은 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=35$이다.

답 35

347

연립방정식 $\begin{cases} x+3y-z=-4 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$라 할 때, $\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x+3y-z=-4 & \cdots ㉠ \\ 2x-y+z=8 & \cdots ㉡ \\ 3x+y-2z=-1 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠+㉡을 하여 z를 소거하면 $3x+2y=4$ … ㉣이고 ㉠×(−2)+㉢을 하여 z를 소거하면 $x-5y=7$ … ㉤이다. ㉣과 ㉤을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$이고 이를 ㉠에 대입하면 $z=3$이다. 따라서 $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=3$이고 구하는 값은 $\alpha+\beta+\gamma=4$이다.

답 4

개념 02. 일·이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

1. 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 정리한다.
2. 1에서 구한 식을 이차방정식에 대입하여 푼다.

348

연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-2xy+4y^2=7 \end{cases}$의 해가 $(x, y)=(a, b)$, (c, d)일 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ x^2-2xy+4y^2=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=x-2$이고 이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$$x^2-2x(x-2)+4(x-2)^2=7 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+3=0$$

에서 $(x-1)(x-3)=0$이므로 $x=1$ 또는 $x=3$이다. 이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, -1)$, $(3, 1)$이므로 구하는 값은 $a+b+c+d=4$이다.

답 ⑤

349 중요

연립방정식 $\begin{cases} x+2y=7 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$을 만족시키는 $x=\alpha$, $y=\beta$에 대하여 $\alpha\beta<0$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x+2y=7 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=13 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠을 x에 대하여 정리하면 $x=-2y+7$이고 이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$$(-2y+7)^2+y^2=13 \quad \Rightarrow \quad 5y^2-28y+36=0$$

에서 $(y-2)(5y-18)=0$이다. 따라서 $y=2$ 또는 $y=\frac{18}{5}$이고 이를 각각 ㉠에 대입하여 x의 값을 구하면 $x=3$ 또는 $x=-\frac{1}{5}$이다. 즉, 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(3, 2)$, $\left(-\frac{1}{5}, \frac{18}{5}\right)$이다. 한편, $\alpha\beta<0$이므로 $\alpha=-\frac{1}{5}$, $\beta=\frac{18}{5}$이다.

따라서 구하는 값은 $\alpha+\beta=\frac{17}{5}$이다.

답 $\frac{17}{5}$

350

x, y에 대한 두 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ x-ay=-3 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ x-y=b \end{cases}$의 해가 서로 같을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

주어진 두 연립방정식의 해가 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 & \cdots ㉠ \\ x^2-y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해가 된다. ㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=-x+5$이고 이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$$x^2-(-x+5)^2=5 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

이므로 $y=2$이다. 따라서 두 연립방정식의 해는 $(x, y)=(3, 2)$이고 이를 $x-ay=-3$에 대입하면 $3-2a=-3$에서 $a=3$이고 $x-y=b$에 대입하면 $b=1$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=4$이다.

답 4

개념 03. 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

1. 이차식이 인수분해가 되면 인수분해 후 일·이차방정식을 연립하여 푼다.
2. 이차식이 인수분해 되지 않는 경우, 이차항 또는 상수항을 소거하여 얻은 식을 대입하거나 인수분해하여 푼다.

351 중요!

연립방정식 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=10 \end{cases}$ 을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-2xy+2y^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠에서

$x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)=0$이므로 $x=y$ 또는 $x=-2y$이다.

(i) $x=y$일 때, $y^2=10$에서 $y=\pm\sqrt{10}$이고 $x=\pm\sqrt{10}$이다. (복호동순)

(ii) $x=-2y$일 때, $y^2=1$에서 $y=\pm1$이고 $x=\mp2$이다. (복호동순)

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$(x, y)=(2, -1), (-2, 1), (\sqrt{10}, \sqrt{10}), (-\sqrt{10}, -\sqrt{10})$$

이고 $x+y$의 최댓값은 $2\sqrt{10}$이다.

답 $2\sqrt{10}$

352

연립방정식 $\begin{cases} x^2=y^2 \\ y^2+2x-3=0 \end{cases}$ 을 푸시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x^2=y^2 & \cdots ㉠ \\ y^2+2x-3=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠에서

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=0$이므로 $x=y$ 또는 $x=-y$이다.

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하여 정리하면 $y^2+2y-3=(y-1)(y+3)=0$에서 $y=1$ 또는 $y=-3$이다. 따라서 $y=1$일 때, $x=1$이고 $y=-3$일 때, $x=-3$이다.

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하여 정리하면 $y^2-2y-3=(y+1)(y-3)=0$에서 $y=-1$ 또는 $y=3$이다. 따라서 $y=-1$일 때, $x=1$이고 $y=3$일 때, $x=-3$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, 1), (-3, -3), (1, -1), (-3, 3)$이다.

답 $(x, y)=(1, 1), (-3, -3), (1, -1), (-3, 3)$

353

연립방정식 $\begin{cases} 3x^2+4xy+y^2=16 \\ x^2+xy+2y^2=8 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} 3x^2+4xy+y^2=16 & \cdots ㉠ \\ x^2+xy+2y^2=8 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠−㉡×2를 하여 상수항을 소거하면

$$x^2+2xy-3y^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x-y)(x+3y)=0$$

에서 $x=y$ 또는 $x=-3y$이다.

(i) $x=y$일 때, $y^2=2$에서 $y=\pm\sqrt{2}$이고 $x=\pm\sqrt{2}$이다. (복호동순)

(ii) $x=-3y$일 때, $y^2=1$에서 $y=\pm1$이고 $x=\mp3$이다. (복호동순)

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (3, -1), (-3, 1)$이므로 $\alpha^2+\beta^2$은 $\alpha=\pm3$, $\beta=\mp1$ (복호동순)일 때, 최댓값 10을 가진다.

답 10

개념 04. $x+y$, xy로 표현가능한 연립이차방정식

1. $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 u, v에 대한 연립방정식을 푼다.
2. x, y가 두 근인 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$을 푼다.

354 중요!

연립방정식 $\begin{cases} x+y-xy=-1 \\ 3x+3y-2xy=3 \end{cases}$ 을 푸시오.

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} u-v=-1 & \cdots ㉠ \\ 3u-2v=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다. ㉠×2−㉡을 하여 v를 소거하면 $u=5$이고 이를 다시 ㉠에 대입하면 $v=6$이다.

즉 $x+y=5$, $xy=6$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이다. 이때

$$t^2-5t+6=0 \quad \Rightarrow \quad (t-2)(t-3)=0$$

에서 $t=2$ 또는 $t=3$이므로 연립방정식의 해는 $(x, y)=(2, 3), (3, 2)$이다.

답 $(x, y)=(2, 3), (3, 2)$

355

연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{3} \\ x+y=4 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+2\beta$의 값은? (단, $\alpha>\beta$이다.)

① -4 ② -2 ③ 0

④ 2 ⑤ 4

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=-\dfrac{1}{3}$에서 $x+y=4$이므로 $xy=-12$이다. 즉, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t-12=0$의 두 근이다. 이때

$$t^2-4t-12=0 \quad \Rightarrow \quad (t+2)(t-6)=0$$

에서 $t=-2$ 또는 $t=6$이므로 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(6, -2), (-2, 6)$이다. $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=6$, $\beta=-2$이고 구하는 값은 $\alpha+2\beta=6+2\cdot(-2)=2$이다.

답 ④

356

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}$ 을 푸시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots ㉠ \\ xy=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠에서

$(x+y)^2-2xy=10$이므로 ㉡을 대입하면 $(x+y)^2=16$에서 $x+y=\pm4$이다.

(i) $x+y=4$, $xy=3$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로 $(t-1)(t-3)=0$에서 $(x, y)=(1, 3), (3, 1)$이다.

(ii) $x+y=-4$, $xy=3$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+4t+3=0$의 두 근이므로 $(t+1)(t+3)=0$에서 $(x, y)=(-1, -3), (-3, -1)$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $(x, y)=(1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$이다.

답 $(x, y)=(1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$

개념 05. 해의 조건이 주어진 연립이차방정식

1. 일차방정식을 이차방정식에 대입한다.
2. 해의 조건을 만족시키도록 1에서 구한 이차방정식의 판별식을 이용한다.

357 중요

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=k \\ x+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해 (x, y)를 가지도록 하는 실수 k의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x-2y=k & \cdots ㉠ \\ x+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠을 x에 대하여 정리하면

$x=2y+k$이고 이를 ㉡에 대입하여 정리하면 $y^2+2y+k-5=0$이다. y에 대한 이차방정식 $y^2+2y+k-5=0$의 판별식을 D라 할 때, 주어진 연립방정식의 해가 한 쌍이 존재하므로

$$\frac{D}{4}=1^2-(k-5)=0 \quad \Rightarrow \quad k=6$$

답 ④

358

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=k^2-5k+4 \\ x^2-2xy=k-1 \end{cases}$ 이 해를 가지지 않을 때, 실수 k의 값을 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} x-2y=k^2-5k+4 & \cdots ㉠ \\ x^2-2xy=k-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자. ㉠$\times x-$㉡을 하면

$$(k^2-5k+4)x=k-1 \quad \Rightarrow \quad (k-1)(k-4)x=k-1 \qquad \cdots ㉢$$

이다. k의 값에 따라 방정식 ㉢의 해를 구하면 다음과 같다.

(i) $k\neq 1$, $k\neq 4$일 때, $x=\frac{1}{k-4}$, $y=\frac{1}{2(k-4)}-\frac{k^2-5k+4}{2}$이다.

(ii) $k=1$일 때, $0\cdot x=0$이므로 방정식 ㉢의 해가 무수히 많다. 따라서 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많다.

(iii) $k=4$일 때, $0\cdot x=3$이므로 방정식 ㉢의 해가 없다. 따라서 주어진 연립방정식의 해가 없다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 실수 k의 값은 4이다.

답 4

359

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2k-4 \\ xy=k^2-10 \end{cases}$ 이 실근을 가지도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오.

주어진 연립방정식에서 $x+y=2k-4$, $xy=k^2-10$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식

$$t^2-(2k-4)t+k^2-10=0 \qquad \cdots ㉠$$

의 두 근이고 주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다. 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-k^2+10=-4k+14\geq 0$$

에서 $k\leq\frac{7}{2}$이므로 조건을 만족시키는 정수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

개념 06. 부정방정식

1. 해의 조건이 정수: (다항식 A)$\times$(다항식 B)=(정수)의 꼴로 변형
2. 해의 조건이 실수
 (1) 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$
 (2) 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 판별식 $D\geq 0$을 이용

360 중요

방정식 $xy+x-2y-9=0$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① 6 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 18

주어진 식을 변형하면

$$xy+x-2y-9=(x-2)y+(x-2)-7=0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(y+1)=7$$

이다. 이때 x, y가 정수이므로 가능한 모든 경우를 표로 나타내면

$x-2$	1	7	-1	-7
$y+1$	7	1	-7	-1

$\Rightarrow$

x	3	9	1	-5
y	6	0	-8	-2

이므로 주어진 방정식을 만족시키는 정수 (x, y)의 순서쌍은

$$(x, y)=(3, 6), (9, 0), (1, -8), (-5, -2)$$

이다. 따라서 xy는 $x=3$, $y=6$일 때 최댓값 18을 가진다.

답 ⑤

361

방정식 $x-2y-5=(2x+3y-3)\sqrt{3}$을 만족시키는 두 유리수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

주어진 방정식을 정리하면 $(x-2y-5)-(2x+3y-3)\sqrt{3}=0$에서 $x-2y-5$와 $2x+3y-3$이 모두 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$\begin{cases} x-2y-5=0 & \cdots ㉠ \\ 2x+3y-3=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이다. ㉠$\times 2-$㉡을 하여 x를 소거하면 $y=-1$이고 이를 ㉠에 다시 대입하면 $x=3$이다. 따라서 구하는 값은 $x+y=2$이다.

답 ⑤

362

방정식 $(xy+4)^2+(x+y-3)^2=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

주어진 방정식에서 x, y가 실수이므로 $xy+4$, $x+y-3$도 실수이다. 실수의 성질에 의하여

$$(xy+4)^2\geq 0, \quad (x+y-3)^2\geq 0$$

이므로 주어진 방정식을 만족시키려면 $xy+4=0$, $x+y-3=0$, 즉 $x+y=3$, $xy=-4$가 되어야 한다. 이때 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t-4=0$의 두 실근이다. $(t+1)(t-4)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=4$이므로 구하는 방정식의 해는 $(x, y)=(-1, 4), (4, -1)$이다.

답 $(x, y)=(-1, 4), (4, -1)$

개념 07. 공통근을 가지는 방정식

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근을 α라 할 때, 두 방정식 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$을 연립하여 풀어서 α의 값을 구한다.

363

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2-5x+6=0,\quad x^2-kx+2k-1=0$$

이 공통근을 가질 때, 상수 k의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

이차방정식 $x^2-5x+6=0$의 해는 $(x-2)(x-3)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=3$이다.
(i) $x=2$를 $x^2-kx+2k-1=0$에 대입하면 $3=0$이므로 방정식이 성립하지 않는다. 따라서 $x=2$는 두 이차방정식의 공통근이 될 수 없다.
(ii) $x=3$을 $x^2-kx+2k-1=0$에 대입하면 $9-k-1=0$에서 $k=8$이다. 이때 두 이차방정식은 공통근 $x=3$을 가진다.
(i), (ii)에 의하여 상수 k의 값은 8이다.

답 ④

364

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2-x+k=0,\quad x^2-5x-k=0$$

이 양수인 공통근 α를 가질 때, $\alpha+k$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

양수인 공통근 α에 대하여 $\begin{cases}\alpha^2-\alpha+k=0 & \cdots ㉠\\ \alpha^2-5\alpha-k=0 & \cdots ㉡\end{cases}$ 이라 하자. ㉠+㉡을 하여 k를 소거하면

$$2\alpha^2-6\alpha=0 \;\Rightarrow\; \alpha(\alpha-3)=0$$

이고 $\alpha>0$이므로 $\alpha=3$이다. 이를 다시 ㉠에 대입하면 $k=-6$이고 구하는 값은 $\alpha+k=-3$이다.

답 ①

365 중요!

x에 대한 두 이차방정식

$$x^2+(2k-3)x+k-8=0,\quad x^2+(k-2)x+3k-10=0$$

이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 상수 k의 값을 구하시오.

두 이차방정식의 공통근을 α라 하면 α와 k에 대한 연립이차방정식

$$\begin{cases}\alpha^2+(2k-3)\alpha+k-8=0 & \cdots ㉠\\ \alpha^2+(k-2)\alpha+3k-10=0 & \cdots ㉡\end{cases}$$

을 얻는다. ㉠−㉡을 하여 α^2항을 소거하면

$$(k-1)\alpha-2k+2=(k-1)(\alpha-2)=0$$

에서 $k=1$ 또는 $\alpha=2$이다.
(i) $k=1$일 때, 주어진 두 연립방정식이 $x^2-x-7=0$으로 일치하므로 두 개의 공통근을 가진다.
(ii) $\alpha=2$일 때, ㉠에 $\alpha=2$를 대입하면 $4+2(2k-3)+k-8=0$에서 $k=2$이다. 주어진 두 이차방정식은

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)=0,\quad x^2-4=(x-2)(x+2)=0$$

이므로 $x=2$를 오직 하나의 공통근으로 가진다.
(i), (ii)에 의하여 오직 하나의 공통근을 가지도록 하는 k의 값은 2이다.

답 2

개념 08. 연립방정식의 활용

1. 구하고자 하는 것을 미지수로 놓고 조건에 맞게 연립방정식을 세운다.
2. 연립방정식을 풀어서 해를 구한다.

366

넓이가 120인 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1씩 늘린 직사각형의 넓이가 144이다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하시오. (단, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길다.)

처음 직사각형의 가로의 길이를 x라고 하고 세로의 길이를 y라 하자. (단, $x>y$)
이 직사각형의 넓이가 120이므로 $xy=120$이고 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1씩 늘렸을 때의 넓이가 144이므로

$$(x+1)(y+1)=xy+x+y+1=144$$

에서 $x+y=23$이다. 따라서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-23t+120=0$의 두 근이다. 이때

$$t^2-23t+120=(t-8)(t-15)=0$$

에서 $t=8$ 또는 $t=15$이므로 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(x, y)=(8, 15), (15, 8)$이고 $x>y$이므로 $x=15$이다.

답 15

367 중요!

어떤 두 자리 자연수 N의 각 자리의 숫자의 제곱의 합은 97이고 N의 일의 자리의 숫자와 십의 자리 숫자를 바꾼 자연수와 N과의 합이 143이다. 자연수 N의 값을 모두 구하시오.

자연수 N의 십의 자리의 숫자를 x $(x\neq 0)$라 하고 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$$\begin{cases}x^2+y^2=97 & \cdots ㉠\\ (x+10y)+(10x+y)=143 & \cdots ㉡\end{cases}$$

이다. ㉡을 y에 대하여 정리하면 $y=-x+13$이므로 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+(-x+13)^2=97 \;\Rightarrow\; x^2-13x+36=0$$

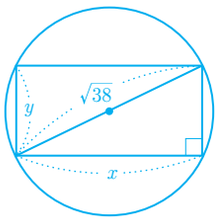
에서 $(x-4)(x-9)=0$이므로 $x=4$ 또는 $x=9$이다. 따라서 연립방정식의 해는 $(x, y)=(4, 9), (9, 4)$이므로 자연수 N의 값은 49 또는 94이다.

답 49 또는 94

368

지름이 $\sqrt{38}$인 원에 내접하고 둘레의 길이가 16인 직사각형의 긴 변의 길이를 구하시오.

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 긴 변의 길이를 x라 하고 짧은 변의 길이를 y라 하자. 원의 지름의 길이가 $\sqrt{38}$이고 둘레의 길이가 16이므로



$$\begin{cases}x^2+y^2=38 & \cdots ㉠\\ 2(x+y)=16 & \cdots ㉡\end{cases}$$

을 얻는다. 이때 ㉡을 y에 대하여 정리하면 $y=-x+8$이고 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+(-x+8)^2=38 \;\Rightarrow\; x^2-8x+13=0$$

이다. 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 $x=4\pm\sqrt{3}$이므로 $y=4\mp\sqrt{3}$이다. (복호동순) 이때 $x>y$이므로 구하는 직사각형의 긴 변의 길이는 $4+\sqrt{3}$이다.

답 $4+\sqrt{3}$

369

연립방정식 $\begin{cases} |x|-2y+6=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

$x<0$일 때, $|x|=-x$이고 $x\geq 0$일 때, $|x|=x$이므로

(i) $x<0$일 때, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x+2y-6=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$이므로 이 연립방정식을 풀면 $x=4$, $y=1$이고 $x<0$이 아니다. 따라서 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x\geq 0$일 때, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x-2y+6=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$이므로 이 연립방정식을 풀면 $x=12$, $y=9$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $x=12$, $y=9$이므로 $x+y=21$이다.

답 ⑤

370

등식 $x(1+i)^2+(y-1)(1-i)^2+9=x^2-y^2$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

두 복소수 $(1+i)^2$, $(1-i)^2$을 계산하면

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i, \quad (1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$$

이므로 주어진 등식을 정리하면

$$(2x-2y+2)i-(x^2-y^2-9)=0$$

이다. 이때 x, y가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} x-y+1=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-y^2-9=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이다. ㉠을 y에 대하여 정리하면 $y=x+1$이고 ㉡에 대입하여 정리하면 $x^2-(x+1)^2-9=0$에서 $x=-5$이다. 이를 ㉠에 대입하면 $y=-4$이므로 구하는 값은 $xy=20$이다.

답 20

371 마타

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다항식 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$이 $x-2$로 나누어떨어지고 다항식 $\{f(x)\}^2+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6일 때, 다항식 $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지의 최댓값을 구하시오.

$f(2)=a$, $g(2)=b$일 때, 다항식 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$$\{f(2)\}^2-\{g(2)\}^2=a^2-b^2=0 \quad \cdots ㉠$$

이고 다항식 $\{f(x)\}^2+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$$\{f(2)\}^2+g(2)=a^2+b=6 \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉠에서 $(a-b)(a+b)=0$이므로 $b=a$ 또는 $b=-a$이다.

(i) $b=a$를 ㉡에 대입하면 $a^2+a-6=(a-2)(a+3)=0$에서 $a=2$ 또는 $a=-3$이므로 $(a, b)=(2, 2), (-3, -3)$이다.

(ii) $b=-a$를 ㉡에 대입하면 $a^2-a-6=(a+2)(a-3)=0$에서 $a=-2$ 또는 $a=3$이므로 $(a, b)=(-2, 2), (3, -3)$이다.

(i), (ii)에서 다항식 $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 $f(2)-g(2)=a-b$는 $(a, b)=(3, -3)$일 때, 최댓값 6을 가진다.

답 6

372

방정식 $xy-3x-2y+10=0$을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

주어진 방정식을 변형하면

$$(x-2)y-3(x-2)+4=0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(y-3)=-4$$

이다. 이때 $x-2$, $y-3$이 정수이므로 가능한 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x-2$	1	2	4	-1	-2	-4
$y-3$	-4	-2	-1	4	2	1
			⇓			
x	3	4	6	1	0	-2
y	-1	1	2	7	5	4

따라서 방정식을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍은

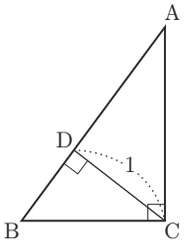
$$(x, y)=(4, 1), (6, 2), (1, 7)$$

이고 그 개수는 3이다.

답 ③

373 기출

$\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 오른쪽 그림과 같이 점 D는 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발이고 $\overline{CD}=1$이다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 5일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



$\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하자. 삼각형 ABC가 선분 AB를 밑변으로 할 때와 선분 BC를 밑변으로 할 때의 넓이가 같으므로

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad ab=x \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 5이므로

$$a+b+x=5 \quad \Rightarrow \quad a+b=5-x \qquad \cdots ㉡$$

이다. 한편, 피타고라스의 정리에 의하여 $x^2=a^2+b^2$이고 우변에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab \\ &=(5-x)^2-2x \\ &=x^2-12x+25 \end{aligned}$$

이므로

$$x^2=x^2-12x+25 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{25}{12}$$

이다. 따라서 선분 AB의 길이는 $\frac{25}{12}$이다.

답 $\frac{25}{12}$

374

x에 대한 두 방정식

$$x^3-(k+2)x^2+(2k+1)x-k=0, \quad x^2-x-2k=0$$

이 공통근 α를 가질 때, αk의 값을 구하시오. (단 k는 양수이다.)

$f(x)=x^3-(k+2)x^2+(2k+1)x-k$라 할 때, $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가진다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	$-k-2$	$2k+1$	$-k$
		1	$-k-1$	k
1	1	$-k-1$	k	0
		1	$-k$	
	1	$-k$	0	

에서 $f(x)=(x-1)^2(x-k)$이므로 방정식 $f(x)=0$의 근은 $x=1$ 또는 $x=k$이다.

(i) $x=1$을 $x^2-x-2k=0$에 대입하면 $1-1-2k=0$에서 $k=0$이므로 k가 양수인 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 $x=1$은 공통근 α가 아니다.

(ii) $x=k$를 $x^2-x-2k=0$에 대입하면 $k^2-3k=0$에서 $k(k-3)=0$이고 k가 양수이므로 $k=3$이고 $\alpha=3$이다.

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=3$, $k=3$이므로 구하는 값은 $\alpha k=9$이다.

답 9

서술형

375

연립방정식 $\begin{cases} |x-y|+2x=0 \\ x^2-xy+3y^2=25 \end{cases}$을 만족시키는 두 실수 x, y를 구하시오.

주어진 연립방정식을 $\begin{cases} |x-y|+2x=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-xy+3y^2=25 & \cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자. $x<y$일 때,

$|x-y|=-x+y$이고 $x\geq y$일 때, $|x-y|=x-y$이다. [20%]

(i) $x<y$일 때, ㉠은 $-x+y+2x=0$에서 $y=-x$이다. 이를 ㉡에 대입하여 정리하면 $x^2=5$에서 $x=\pm\sqrt{5}$이므로 $(x, y)=(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$이다. 이때 $x<y$이므로 $(x, y)=(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$이다. [35%]

(ii) $x\geq y$일 때, ㉠은 $x-y+2x=0$에서 $y=3x$이다. 이를 ㉡에 대입하여 정리하면 $x^2=1$에서 $x=\pm1$이므로 $(x, y)=(1, 3)$, $(-1, -3)$이다. 이때 $x\geq y$이므로 $(x, y)=(-1, -3)$이다. [35%]

(i), (ii)에 의하여 구하는 연립방정식의 해는 $(x, y)=(-1, -3)$, $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$이다. [10%]

답 $(x, y)=(-1, -3)$, $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

376

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y-xy=-k+5 \\ x+y+2xy=2k+8 \end{cases}$이 실근을 가지도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} u-v=-k+5 & \cdots ㉠ \\ u+2v=2k+8 & \cdots ㉡ \end{cases}$으로 나타낼 수 있다. ㉠−㉡을 하여 u를 소거하면 $-3v=-3k-3$에서 $v=k+1$이고 이를 ㉠에 대입하면 $u=6$이다. 따라서 $x+y=6$, $xy=k+1$이다. [40%]

즉, $x+y=6$, $xy=k+1$에서 x, y는 t에 대한 이차방정식

$$t^2-6t+(k+1)=0$$

의 두 근이다. [20%]

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 주어진 연립방정식이 실근을 가지면 이차방정식 $t^2-6t+(k+1)=0$의 실근이 존재하므로

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k+1)\geq0$$

에서 $k\leq8$이다. [40%]

답 $k\leq8$

09 여러 가지 부등식

01 연립일차부등식

1. 연립일차부등식의 풀이

(1) 각 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸 후 공통범위를 찾는다.

(2) $A<B<C$의 꼴인 연립부등식은 $A<B$, $B<C$로 바꾸어 푼다.

2. 절댓값 기호를 포함한 부등식

$0<a<b$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $|x|<a$이면 $-a<x<a$

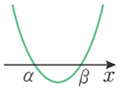
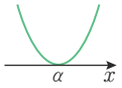
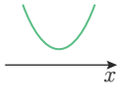
(2) $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$

(3) $a<|x|<b$이면 $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$

02 이차부등식

1. 이차부등식과 이차함수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하고, 두 실근을 가지는 경우 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha\le\beta)$라 하면 이차부등식의 해는 다음과 같다.

판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\ne\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\ge0$	$x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해가 없다	해가 없다
$ax^2+bx+c\le0$	$\alpha\le x\le\beta$	$x=\alpha$	해가 없다

2. 해가 주어진 이차부등식

두 실수 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$에 대하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

(1) 해가 $\alpha<x<\beta$ $\iff$ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

(2) 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ $\iff$ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

(3) 해가 $x=\alpha$ $\iff$ $(x-\alpha)^2\le0$

(4) 해가 $x\ne\alpha$인 모든 실수 $\iff$ $(x-\alpha)^2>0$

03 연립이차부등식

1. 연립이차부등식의 풀이: 각 부등식을 풀어서 수직선 위에 나타낸 후 공통범위를 찾는다.

2. 이차방정식과 이차부등식: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β, 판별식 D에 대하여

(1) 두 근이 모두 양수 $\iff$ $D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수 $\iff$ $D\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호 $\iff$ $\alpha\beta<0$

마·타·노·트

▶ 절댓값 기호가 2개 이상일 때
절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 기준으로 범위를 나누어서 푼다.

▶ $a<0$일 때
$a<0$인 경우에는 이차부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수를 양수로 만들어 푼다.

▶ 이차부등식이 항상 성립할 조건
1. $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립: $a>0$, $D<0$
2. $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립: $a<0$, $D<0$

▶ 이차부등식과 이차방정식
이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계를 이용하여 실수 a, b의 값을 구할 수도 있다.

▶ 두 근이 서로 다른 부호
두 근이 서로 다른 부호인 경우 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{c}{a}<0$이므로 $ac<0$이다.
이때, $D=b^2-4ac>0$이므로 항상 서로 다른 두 실근을 가진다.

개념 확인

정답 및 풀이 p.6

[377 ~ 379] 다음 x에 대한 부등식을 푸시오.

001 $3x-3>x+1$ $3x-3>x+1$에서 $2x>4 \Rightarrow x>2$

답 $x>2$

002 $2x+1-(x+3)<x+1$ $2x+1-(x+3)<x+1$의 좌변을 이항하면 $0<3$이므로 해는 모든 실수이다.

답 모든 실수

003 $|x-3|<2$ $|x-3|<2$에서 $-2<x-3<2$이므로 $1<x<5$이다.

답 $1<x<5$

[380 ~ 382] 다음 연립부등식을 푸시오.

004 $\begin{cases} x+1\geq -3 \\ 2x<4 \end{cases}$ $x+1\geq -3$에서 $x\geq -4$이고 $2x<4$에서 $x<2$이다.
따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-4\leq x<2$이다.

답 $-4\leq x<2$

005 $2x-1<x+3<-3x-1$ $2x-1<x+3$에서 $x<4$이고 $x+3<-3x-1$에서 $x<-1$이다. 따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x<-1$이다.

답 $x<-1$

006 $\dfrac{x-3}{2}\leq x<\dfrac{8-x}{3}$ $\dfrac{x-3}{2}\leq x$의 양변에 2를 곱하면 $x-3\leq 2x$에서 $x\geq -3$이고 $x<\dfrac{8-x}{3}$의 양변에 3을 곱하면 $3x<8-x$에서 $x<2$이다.
따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-3\leq x<2$이다.

답 $-3\leq x<2$

[383 ~ 384] 다음 이차부등식을 푸시오.

007 $x^2-7x+10>0$ $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)>0$

답 $x<2$ 또는 $x>5$

008 $x^2-3x+1<x-4$ $x^2-3x+1<x-4$에서 $x^2-4x+5<0$
이때 모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$이므로 해는 없다.

답 해는 없다.

[385 ~ 388] 해가 다음과 같고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 구하시오.

009 $-1<x<3$ $(x+1)(x-3)<0$에서 $x^2-2x-3<0$

답 $x^2-2x-3<0$

010 $x<2$ 또는 $x>4$ $(x-2)(x-4)>0$에서 $x^2-6x+8>0$

답 $x^2-6x+8>0$

011 $x=3$ $(x-3)^2\leq 0$에서 $x^2-6x+9\leq 0$

답 $x^2-6x+9\leq 0$

012 $x\neq -2$인 모든 실수 $(x+2)^2>0$에서 $x^2+4x+4>0$

답 $x^2+4x+4>0$

[389 ~ 390] 다음 x에 대한 이차부등식이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

013 $x^2+kx-k+3\geq 0$ $x^2+kx-k+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4(-k+3)=k^2+4k-12=(k-2)(k+6)\leq 0$
이므로 $-6\leq k\leq 2$이다.

답 $-6\leq k\leq 2$

014 $-x^2-2kx-3k\leq 0$ $-x^2-2kx-3k=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(-1)\cdot(-3k)=k^2-3k=k(k-3)\leq 0$
이므로 $0\leq k\leq 3$이다.

답 $0\leq k\leq 3$

[391 ~ 392] 다음 연립부등식을 푸시오.

015 $\begin{cases} x^2-x-6\leq 0 \\ 6-x<x^2 \end{cases}$
(i) $x^2-x-6\leq 0$에서 $(x+2)(x-3)\leq 0$이므로 $-2\leq x\leq 3$
(ii) $6-x<x^2$에서 $(x-2)(x+3)>0$이므로 $x<-3$ 또는 $x>2$
(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $2<x\leq 3$이다.

답 $2<x\leq 3$

016 $4x-3<x^2-x+3<5x-2$
(i) $4x-3<x^2-x+3$에서 $(x-2)(x-3)>0$이므로 $x<2$ 또는 $x>3$
(ii) $x^2-x+3<5x-2$에서 $(x-1)(x-5)<0$이므로 $1<x<5$
(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $1<x<2$ 또는 $3<x<5$이다.

답 $1<x<2$ 또는 $3<x<5$

개념 적용

개념 01. 부등식의 성질

실수 a, b, c에 대하여

1. $a<b$이고 $b<c$이면 $a<c$
2. $a<b$이면 $a+c<b+c$, $a-c<b-c$
3. $a<b$일 때, $c>0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$, $c<0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

017

$a>b>0$을 만족하는 두 실수 a, b에 대하여 옳은 것만을 **[보기]**에서 있는 대로 고르시오.

[보기]

ㄱ. $a^2<b^2$　　ㄴ. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　ㄷ. $\frac{a}{b}<\frac{b}{a}$

ㄱ. (거짓) 【반례】 $a=2$, $b=1$이면 $a>b>0$이고 $a^2=4$, $b^2=1$이므로 $a^2>b^2$

ㄴ. (참) $a>b$, $ab>0$이므로 $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$ ⇒ $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$

ㄷ. (거짓) 【반례】 $a=2$, $b=1$이면 $a>b>0$이고 $\frac{a}{b}=2$, $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$이다.

답 ㄴ

018 중요!

a, b, c가 실수일 때, 옳은 것만을 **[보기]**에서 있는 대로 고르시오.

[보기]

ㄱ. $a>0$, $b>0$이고 $\frac{a}{b}>1$이면 $a>b$이다.

ㄴ. $a>b$, $b^2>c^2$이면 $a>c$이다.

ㄷ. $a>b>c$이면 $\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-c}$이다.

ㄱ. (참) $\frac{a}{b}>1$, $b>0$이므로 양변에 b를 곱하면 $a>b$이다.

ㄴ. (거짓) 【반례】 $a=-1$, $b=-2$, $c=1$이면 $a>b$, $b^2>c^2$이지만 $c>a$이다.

ㄷ. (참) $a-c>b-c>0$이므로 $\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-c}$이다.

답 ㄱ, ㄷ

개념 02. 부등식 $ax>b$의 풀이

1. $a>0$일 때, $x>\frac{b}{a}$
2. $a<0$일 때, $x<\frac{b}{a}$
3. $a=0$일 때, $b<0$이면 해는 모든 실수이고, $b\geq 0$이면 해가 없다.

019 중요!

x에 대한 부등식 $(a+b)x<2b$의 해가 $x>3$일 때, x에 대한 부등식 $ax>b$의 해를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

$a+b=0$이면 해는 모든 실수거나 해가 없으므로 $a+b\neq 0$이다. 이때, 부등식 $(a+b)x<2b$의 해가 $x>3$이므로 $a+b<0$이다. 양변을 $a+b$로 나누면 $x>\frac{2b}{a+b}$에서 $\frac{2b}{a+b}=3$이므로 $b=-3a$이다. 한편 $a+b=-2a<0$이므로 $a>0$이고 부등식 $ax>b$에 $b=-3a$를 대입하면 $ax>-3a$에서 $a>0$이므로 $x>-3$이다.

답 $x>-3$

020

x에 대한 부등식 $k^2x+2>4x+k$의 해가 모든 실수일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

$k^2x+2>4x+k$에서 $(k-2)(k+2)x>k-2$이다. 이 부등식의 해가 모든 실수이므로 k는 $\begin{cases}(k-2)(k+2)=0 & \cdots ㉠\\ k-2<0 & \cdots ㉡\end{cases}$ 을 만족한다. ㉠에서 $k=-2$ 또는 $k=2$이고 ㉡에서 $k<2$이므로 구하는 상수 k의 값은 -2이다.

답 -2

개념 03. 연립일차부등식의 풀이

1. 각 일차부등식의 해를 구한다.
2. 1의 해를 수직선 위에 나타낸다.
3. 공통범위를 구한다.

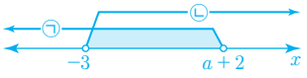
021

연립부등식 $\begin{cases}3x-2<2x+a\\ x<2x+3\end{cases}$ 의 해가 $b<x<3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

$3x-2<2x+a$에서 $x<a+2$ $\cdots ㉠$

$x<2x+3$에서 $-3<x$ $\cdots ㉡$

이다. ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



이때 연립부등식의 해가 $b<x<3$이므로 $a+2=3$, $b=-3$이다. 따라서 $a=1$, $b=-3$이고 구하는 값은 $a+b=1+(-3)=-2$이다.

답 -2

022 중요!

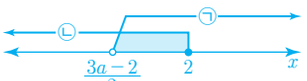
연립부등식 $\begin{cases}-x-2<x-3a\\ 5x\leq x+8\end{cases}$ 이 해를 가지도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

$-x-2<x-3a$에서 $x>\frac{3a-2}{2}$ $\cdots ㉠$

$5x\leq x+8$에서 $x\leq 2$ $\cdots ㉡$

이다. ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 $\frac{3a-2}{2}<2$에서 $a<2$이고 정수 a의 최댓값은 1이다.

답 ③

개념 04. 절댓값 기호를 포함한 부등식

1. 절댓값 안의 식이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.
2. 각 범위에서 절댓값 기호를 없앤 후 해를 구한다.
3. 2에서 각 범위별로 구한 해를 모두 합한다.

023

부등식 $|2x-3|<7$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

$|2x-3|<7$에서 $-7<2x-3<7$이므로 $-2<x<5$이다. 따라서 $a=-2$, $b=5$이므로 구하는 값은 $a+b=3$이다.

답 3

024

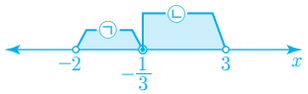
부등식 $|3x+1|<x+7$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 값, 즉 $x=-\frac{1}{3}$을 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

(i) $x<-\frac{1}{3}$일 때, $-3x-1<x+7$에서 $x>-2$이므로 $-2<x<-\frac{1}{3}$ … ㉠

(ii) $x\geq-\frac{1}{3}$일 때, $3x+1<x+7$에서 $x<3$이므로 $-\frac{1}{3}\leq x<3$ … ㉡

(i), (ii)에서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-2<x<3$이고 $a=-2$, $b=3$이므로 구하는 값은 $a+b=1$이다.

답 1

025 중요!

부등식 $|x+1|+|x-2|<x+7$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값, 즉 $x=-1$, 2를 기준으로 x의 값의 범위를 나눈다.

(i) $x<-1$일 때, $-(x+1)-(x-2)<x+7$에서 $x>-2$이므로 $-2<x<-1$이다.

(ii) $-1\leq x<2$일 때, $x+1-(x-2)<x+7$에서 $x>-4$이므로 $-1\leq x<2$이다.

(iii) $x\geq2$일 때, $x+1+x-2<x+7$에서 $x<8$이므로 $2\leq x<8$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-2<x<8$이므로 이를 만족하는 정수 x의 개수는 9이다.

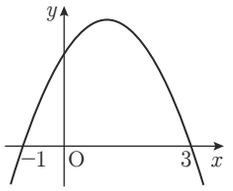
답 ⑤

개념 05. 이차부등식과 이차함수의 관계

1. 부등식 $f(x)>0$의 해: $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위
2. 부등식 $f(x)>g(x)$의 해: $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

026

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이차부등식 $f(x)\geq0$의 해가 $\alpha\leq x\leq\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.



부등식 $f(x)\geq0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-1\leq x\leq3$이다. 따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$이므로 $\alpha+\beta=2$이다.

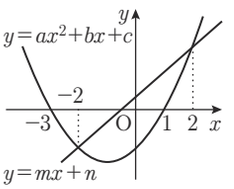
답 2

027

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 오른쪽 그림과 같을 때, x에 대한 이차부등식

$$ax^2+(b-m)x+c-n>0$$

의 해를 구하시오. (단, a, b, c, m, n은 상수이다.)



이차부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n>0$은

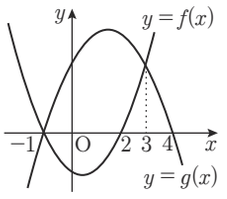
$$ax^2+bx+c-(mx+n)>0 \Rightarrow ax^2+bx+c>mx+n$$

이므로 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다. 따라서 구하는 x의 값의 범위는 $x<-2$ 또는 $x>2$이다.

답 $x<-2$ 또는 $x>2$

028 중요!

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)-g(x)>0$의 해를 구하시오.



부등식 $f(x)-g(x)>0$에서 $f(x)>g(x)$이므로 부등식 $f(x)-g(x)>0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x<-1$ 또는 $x>3$이다.

답 $x<-1$ 또는 $x>3$

개념 06. 이차부등식의 풀이

x^2의 계수가 $a(a>0)$인 이차식 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식의 해는 다음과 같이 구한다.

1. $D>0$이면 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.
 $\alpha<\beta$일 때,
 (1) $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$이면 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
 (2) $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$이면 $\alpha<x<\beta$
2. $D\le 0$이면 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형하여 해를 구한다.

029

이차부등식 $(2x-1)(x-4)\le -2x+1$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

주어진 부등식 $(2x-1)(x-4)\le -2x+1$의 우변을 이항하면

$$(2x-1)\{(x-4)+1\}\le 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-1)(x-3)\le 0$$

이므로 $\frac{1}{2}\le x\le 3$이다. 따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3으로 그 개수는 3이다.

답 3

030 중요!

x에 대한 이차부등식 $ax^2+5x+b>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

이차부등식 $ax^2+5x+b>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이므로 $a<0$이다. 이때 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$이므로 부등식의 양변에 $a\,(a<0)$를 곱하면

$$a\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0 \quad \Rightarrow \quad ax^2-\frac{5}{6}ax+\frac{1}{6}a>0$$

이다. 또한 이 부등식이 이차부등식 $ax^2+5x+b>0$과 같으므로

$$-\frac{5}{6}a=5, \quad \frac{1}{6}a=b$$

이다. 따라서 $a=-6$, $b=-1$이고 구하는 값은 $a+b=-7$이다.

답 −7

031

이차부등식 $x^2-4x+1<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 1=3>0$$

이므로 α, β가 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 실근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=1$$

이고 곱셈 공식의 변형으로부터 구하는 값은 다음과 같다.

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot 1=14$$

답 14

개념 07. 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때,

1. $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건: $a>0$, $D<0$
2. $ax^2+bx+c\ge 0$이 항상 성립할 조건: $a>0$, $D\le 0$
3. $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립할 조건: $a<0$, $D<0$
4. $ax^2+bx+c\le 0$이 항상 성립할 조건: $a<0$, $D\le 0$

032 중요!

x에 대한 이차부등식 $x^2+(a-3)x+a>0$의 해가 모든 실수가 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

모든 실수 x에 대하여 $x^2+(a-3)x+a>0$이 성립하므로 x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-3)x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a-3)^2-4a=a^2-10a+9=(a-1)(a-9)<0$$

에서 $1<a<9$이다. 따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8로 그 개수는 7이다.

답 7

033

x에 대한 이차부등식 $x^2-(a+3)x+a+6<0$이 해를 가지지 않도록 하는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

주어진 부등식이 해를 가지지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-(a+3)x+a+6\ge 0$이 성립해야 한다. x에 대한 이차방정식 $x^2-(a+3)x+a+6=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+3)^2-4(a+6)=a^2+2a-15=(a-3)(a+5)\le 0$$

에서 $-5\le a\le 3$이다. 따라서 a의 최댓값은 3, 최솟값은 −5이므로 구하는 값은 $3+(-5)=-2$이다.

답 −2

034

x에 대한 부등식 $ax^2+4ax+3a-2\ge 0$이 해를 가지지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$ ② $-2<a\le 0$ ③ $0<a<2$
④ $0<a\le 2$ ⑤ $-2<a<2$

부등식 $ax^2+4ax+3a-2\ge 0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+4ax+3a-2<0$이 성립해야 한다.

(i) $a=0$일 때, $0\cdot x^2+0\cdot x-2<0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a\ne 0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+4ax+3a-2<0$이 성립하므로 $a<0$이다. 또한 x에 대한 이차방정식 $ax^2+4ax+3a-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2a)^2-a(3a-2)=a^2+2a=a(a+2)<0$$

에서 $-2<a<0$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 a의 값의 범위는 $-2<a\le 0$이다.

답 ②

개념 08. 연립이차부등식의 풀이

각 이차부등식을 풀어서 수직선 위에 나타낸 후 공통범위를 찾는다.

035 중요

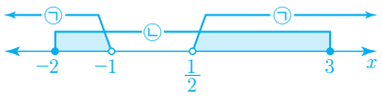
연립부등식 $\begin{cases} 2x^2>1-x \\ x^2\le x+6 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

(i) $2x^2>1-x$에서 $(2x-1)(x+1)>0$이므로 $x<-1$ 또는 $x>\frac{1}{2}$ … ㉠

(ii) $x^2\le x+6$에서 $(x+2)(x-3)\le 0$이므로 $-2\le x\le 3$ … ㉡

(i), (ii)에서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해는 $-2\le x<-1$ 또는 $\frac{1}{2}<x\le 3$이므로 이를 만족시키는 정수 x는 -2, 1, 2, 3이고 그 개수는 4이다.

036

답 ④

연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ x^2-5|x|+6\le 0 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

(i) $x^2-2x-3<0$에서 $(x+1)(x-3)<0$이므로 $-1<x<3$ … ㉠

(ii) $x^2-5|x|+6\le 0$에서

i) $x<0$일 때 $x^2+5x+6\le 0$에서 $(x+2)(x+3)\le 0$이므로 $-3\le x\le -2$

ii) $x\ge 0$일 때 $x^2-5x+6\le 0$에서 $(x-2)(x-3)\le 0$ 이므로 $2\le x\le 3$

i), ii)에서 $x^2-5|x|+6\le 0$의 해는 $-3\le x\le -2$ 또는 $2\le x\le 3$ … ㉡

(i), (ii)에서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해는 $2\le x<3$이고, 정수 x는 2로 그 개수는 1

답 1

037

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x+4>0 \\ x^2-(a+2)x+2a\le 0 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 값이 5와 6뿐일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

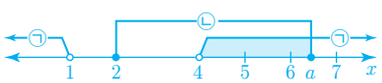
(i) $x^2-5x+4>0$에서 $(x-1)(x-4)>0$이므로

$x<1$ 또는 $x>4$ … ㉠

(ii) $x^2-(a+2)x+2a\le 0$에서

$(x-2)(x-a)\le 0$ … ㉡

(i), (ii)에서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 5와 6뿐이면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 a의 값의 범위는 $6\le a<7$이다.

답 $6\le a<7$

개념 09. 이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β, 판별식 D에 대하여

1. 두 근이 모두 양수 $\iff$ $D\ge 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$
2. 두 근이 모두 음수 $\iff$ $D\ge 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$
3. 두 근이 서로 다른 부호 $\iff$ $\alpha\beta<0$

038 중요

x에 대한 이차방정식 $x^2+(k+4)x+(k+7)=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 정수 k의 값을 구하시오.

이차방정식 $x^2+(k+4)x+(k+7)=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면 두 실근이 모두 양수이므로

(i) $D=(k+4)^2-4(k+7)=k^2+4k-12$

$=(k-2)(k+6)\ge 0$ ⇒ $k\le -6$ 또는 $k\ge 2$

(ii) $\alpha+\beta=-(k+4)>0$ ⇒ $k<-4$

(iii) $\alpha\beta=k+7>0$ ⇒ $k>-7$

(i), (ii), (iii)에서 $-7<k\le -6$이므로 정수 k의 값은 -6이다.

답 -6

039

x에 대한 이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 두 실근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면 두 실근이 모두 음수이므로

(i) $D=k^2-4\cdot 1\cdot 4=k^2-16$

$=(k+4)(k-4)\ge 0$ ⇒ $k\le -4$ 또는 $k\ge 4$

(ii) $\alpha+\beta=k<0$

(iii) $\alpha\beta=4>0$

(i), (ii), (iii)에서 공통범위를 구하면 $k\le -4$이다.

답 $k\le -4$

040

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-1=0$의 두 근의 부호가 서로 다를 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-1=0$의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이므로

$k^2-1=(k+1)(k-1)<0$ ⇒ $-1<k<1$

따라서 구하는 k의 값의 범위는 $-1<k<1$이다.

답 $-1<k<1$

041

x에 대한 부등식 $(a+2b)x+1>2ax-b^2+2b$를 만족하는 실수 x가 존재하지 않을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$(a+2b)x>2ax-b^2+2b-1$에서 $(a-2b)x<(b-1)^2$이고 이때 이를 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으려면

$$\begin{cases} a-2b=0 & \cdots ㉠ \\ (b-1)^2\le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $a=2b$이고 ㉡에서 $b=1$이다. 따라서 $a=2$, $b=1$이고 구하는 값은 $a+b=2+1=3$이다.

답 ③

042 마탑

x에 대한 두 이차방정식 $x^2-4x+k+12=0$, $x^2-6x-k+a=0$이 모두 실근을 가지도록 하는 정수 k의 개수가 2일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

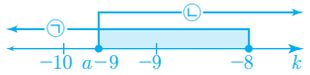
이차방정식 $x^2-4x+k+12=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=4-(k+12)\ge 0 \quad \Rightarrow \quad k\le -8 \qquad \cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2-6x-k+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=9-(-k+a)\ge 0 \quad \Rightarrow \quad k\ge a-9 \qquad \cdots ㉡$$

두 이차방정식이 모두 실근을 가지도록 하는 정수 k의 개수가 2이므로 그림에서



$-10<a-9\le -9$이고 이를 풀면 $-1<a\le 0$이다.

답 $-1<a\le 0$

043

x에 대한 이차방정식 $x^2+3(k-1)x+k^2-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)<0$이 되도록 하는 정수 k의 값의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-3k+3, \quad \alpha\beta=k^2-2 \qquad \cdots ㉠$$

이고 주어진 부등식 $(\alpha-1)(\beta-1)<0$은

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$

이므로 ㉠을 대입하면

$$\begin{aligned}\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1&=(k^2-2)-(-3k+3)+1\\&=k^2+3k-4\\&=(k-1)(k+4)<0\end{aligned}$$

에서 $-4<k<1$이다. 이를 만족시키는 정수 k는 -3, -2, -1, 0으로 그 개수는 4이다.

답 ⑤

044

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>3$일 때, 부등식 $f(5-2x)<f(5)$의 해를 구하시오.

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>3$이므로 $f(x)=a(x+1)(x-3)$ (단, $a<0$)으로 놓을 수 있다.

$$f(5-2x)=a(5-2x+1)(5-2x-3)=4a(x-3)(x-1)$$

이고 $f(5)=12a$이므로 $f(5-2x)<f(5)$에서

$$4a(x-3)(x-1)<12a$$

이고 양변을 $4a$로 나누면

$$(x-3)(x-1)>3 \quad \Rightarrow \quad x(x-4)>0$$

이므로 구하는 부등식의 해는 $x<0$ 또는 $x>4$이다.

답 $x<0$ 또는 $x>4$

서술형

045

x에 대한 두 이차부등식

$$(x-2)(x-6)>0, \quad (x-3)(x-a^2-a)\le 0$$

을 동시에 만족시키는 x의 값이 존재하지 않도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

$(x-2)(x-6)>0$에서 $x<2$ 또는 $x>6$이므로 $(x-3)(x-a^2-a)\le 0$의 해와 공통 범위가 없으려면 $2\le a^2+a\le 6$이다.

(i) $2\le a^2+a$에서 $(a-1)(a+2)\ge 0$이므로 $a\le -2$ 또는 $a\ge 1$ … ㉠

(ii) $a^2+a\le 6$에서 $(a-2)(a+3)\le 0$이므로 $-3\le a\le 2$ … ㉡

(i), (ii)에서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 부등식 $2\le a^2+a\le 6$의 해는 $-3\le a\le -2$ 또는 $1\le a\le 2$이므로 이를 만족시키는 정수 a는 -3, -2, 1, 2로 그 개수는 4이다.

답 4

046

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+2a-3=0$의 두 근이 이차부등식 $(x+2)(x-1)<0$의 해의 범위에 존재하도록 하는 a의 값의 범위를 구하시오.

$f(x)=x^2+ax+2a-3$이라 두면, $(x+2)(x-1)<0$에서 $-2<x<1$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -2보다 크고 1보다 작아야 한다.

(i) 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-4\cdot 1\cdot(2a-3)=a^2-8a+12=(a-2)(a-6)\ge 0$$

에서 $a\le 2$ 또는 $a\ge 6$이다.

(ii) 포물선 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{2}$이므로 $-2<-\frac{a}{2}<1$에서 $-2<a<4$

(iii) $f(-2)=4-2a+2a-3>1$에서 $1>0$이므로 $f(-2)>0$이 항상 성립한다.

(iv) $f(1)=1+a+2a-3>3a-2$에서 $a>\frac{2}{3}$이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에서 구하는 a의 값의 범위는 $\frac{2}{3}<a\le 2$이다.

답 $\frac{2}{3}<a\le 2$

047

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x^2-(a-1)x-2(a+1)\le 0 \end{cases}$을 만족하는 정수 x의 개수가 2일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

부등식 $x^2-x-2>0$을 풀면

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0 \ \Rightarrow \ x<-1 \text{ 또는 } x>2 \quad \cdots ㉠$$

이다. [20%]

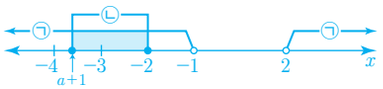
부등식 $x^2-(a-1)x-2(a+1)\le 0$을 풀면

$$x^2-(a-1)x-2(a+1)=(x+2)\{x-(a+1)\}\le 0 \quad \cdots ㉡$$

이다. [20%]

(i) $a+1\le -2$일 때, 즉 $a\le -3$이면 ㉡의 해는 $a+1\le x\le -2$

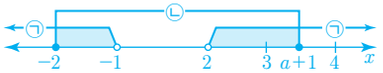
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되려면 그림과 같아야 하므로



$-4<a+1\le -3$에서 $-5<a\le -4$이다. [25%]

(ii) $a+1>-2$일 때, 즉 $a>-3$이면 ㉡의 해는 $-2\le x\le a+1$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되려면 그림과 같아야 하므로



$3\le a+1<4$에서 $2\le a<3$이다. [25%]

(i), (ii)에 의하여 구하는 a의 값의 범위는 $-5<a\le -4$ 또는 $2\le a<3$이다. . [10%]

답 $-5<a\le -4$ 또는 $2\le a<3$

048

x에 대한 부등식 $(k+1)x^2+2(k+1)x+4\ge 0$의 해가 모든 실수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

이차항의 계수가 0인 경우와 아닌 경우를 나누면

(i) $k=-1$일 때,

주어진 부등식은 $0\cdot x\ge -4$이므로 해는 모든 실수이다. [30%]

(ii) $k\ne -1$일 때,

주어진 부등식의 해가 모든 실수가 되려면 x^2의 계수가 양수가 되어야 하므로

$k+1>0$에서 $k>-1$이다. [20%]

x에 대한 이차방정식 $(k+1)x^2+2(k+1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-4(k+1)=(k+1)(k-3)\le 0$$

에서 $-1\le k\le 3$이다.

$k\ne -1$과의 공통부분은 $-1<k\le 3$이다. [40%]

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $-1\le k\le 3$이다. [10%]

답 $-1\le k\le 3$

10 평면좌표

01 두 점 사이의 거리

1. **수직선** 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 **거리**는

$$\overline{AB}=|x_2-x_1|$$

2. **좌표평면** 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 **거리**는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

02 선분을 내분하는 점과 외분하는 점

1. **수직선** 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 **내분하는 점** P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 **중점** M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

(3) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 **외분하는 점** Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$$

2. **좌표평면** 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 **내분하는 점** P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 **중점** M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

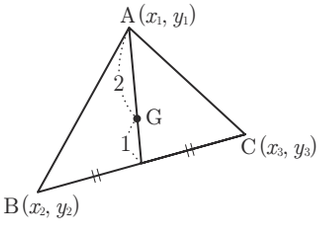
(3) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 **외분하는 점** Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

03 삼각형의 무게중심

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 **무게중심** G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



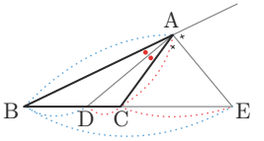
마·타·노·트

▶ 중선정리

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

▶ 각의 이등분선



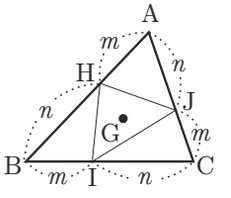
삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D, 각 A의 외각의 이등분선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 E라 하면

1. $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
2. $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}$

이 성립한다.

▶ 무게중심과 내분

삼각형 ABC의 세 변을 각각 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점들을 연결하여 만든 삼각형 HIJ의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 같다.



개념 확인

정답 및 풀이 p.11

[425 ~ 426] 수직선 위의 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

049 A(2), B(10) $\overline{AB}=|10-2|=8$

답 8

050 A(−3), B(6) $\overline{AB}=|6-(-3)|=9$

답 9

[427 ~ 429] 좌표평면 위의 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

051 A(0, 2), B(2, 1) $\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

052 A(−1, 3), B(11, −2)
$\overline{AB}=\sqrt{\{11-(-1)\}^2+(-2-3)^2}=\sqrt{169}=13$

답 13

053 O(0, 0), A(−4, 3) $\overline{OA}=\sqrt{(-4-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{25}=5$

답 5

[430 ~ 432] 수직선 위의 두 점 A(4), B(−6)에 대하여 다음을 구하시오.

054 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점 P의 좌표
$P\left(\frac{2\cdot(-6)+3\cdot4}{2+3}\right)$ ⇒ P(0)

답 P(0)

055 선분 AB의 중점 M의 좌표 $M\left(\frac{4-6}{2}\right)$ ⇒ M(−1)

답 M(−1)

056 선분 AB를 2:3으로 외분하는 점 Q의 좌표
$Q\left(\frac{2\cdot(-6)-3\cdot4}{2-3}\right)$ ⇒ Q(24)

답 Q(24)

[433 ~ 435] 좌표평면 위의 두 점 A(4, −1), B(−2, 7)에 대하여 다음을 구하시오.

057 선분 AB를 3:1로 내분하는 점 P의 좌표
$P\left(\frac{3\cdot(-2)+1\cdot4}{3+1}, \frac{3\cdot7+1\cdot(-1)}{3+1}\right)$ ⇒ $P\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$

답 $P\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$

058 선분 AB의 중점 M의 좌표 $M\left(\frac{4-2}{2}, \frac{-1+7}{2}\right)$ ⇒ M(1, 3)

답 M(1, 3)

059 선분 AB를 3:1로 외분하는 점 Q의 좌표
$Q\left(\frac{3\cdot(-2)-1\cdot4}{3-1}, \frac{3\cdot7-1\cdot(-1)}{3-1}\right)$ ⇒ Q(−5, 11)

답 Q(−5, 11)

[436 ~ 437] 다음 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

060 A(−4, 2), B(1, 3), C(6, −5)
$G\left(\frac{-4+1+6}{3}, \frac{2+3-5}{3}\right)$ ⇒ G(1, 0)

답 G(1, 0)

061 A(−6, −3), B(2, 4), C(7, 5)
$G\left(\frac{-6+2+7}{3}, \frac{-3+4+5}{3}\right)$ ⇒ G(1, 2)

답 G(1, 2)

개념 적용

개념 01. 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

062

세 점 $A(2, 3)$, $B(a, -2)$, $C(4, 1)$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, a의 값을 구하시오.

두 점 A, B 사이의 거리와 두 점 B, C 사이의 거리가 서로 같으므로

$$\sqrt{(a-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{(4-a)^2+\{1-(-2)\}^2}$$

이고, 양변을 제곱하면

$$(a-2)^2+25=(4-a)^2+9 \quad \Rightarrow \quad a^2-4a+29=a^2-8a+25$$

에서 $4a=-4$이다. 따라서 $a=-1$이다.

답 -1

063 중요!

두 점 $A(a+3, 1)$, $B(2, 5)$에 대하여 $\overline{AB}=\sqrt{41}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

두 점 A, B 사이의 거리가

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-a-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{(-a-1)^2+16}=\sqrt{41}$$

이므로 양변을 제곱하면

$$(-a-1)^2+16=41 \quad \Rightarrow \quad (a+1)^2=25$$

에서 $a+1=\pm5$이다. 따라서 양수 a의 값은 4이다.

답 4

064

두 점 $A(3, -2)$, $B(-1, 2)$로부터 같은 거리에 있는 직선 $y=2x$ 위의 점 P의 좌표는?

① $(-1, -2)$ ② $(0, 0)$ ③ $(1, 2)$
④ $(2, 4)$ ⑤ $(3, 6)$

점 P가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 좌표를 $P(a, 2a)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}$를 만족한다. 따라서

$$\sqrt{(3-a)^2+(-2-2a)^2}=\sqrt{(-1-a)^2+(2-2a)^2}$$

의 양변을 제곱하여 정리하면 $8a=-8$이므로 $a=-1$이다. 즉, 점 P의 좌표는 $(-1, -2)$이다.

답 ①

개념 02. 세 변의 길이와 삼각형

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서

1. $a=b=c$이면 정삼각형
2. $a=b$이면 $a=b$인 이등변삼각형
3. $c^2=a^2+b^2$이면 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

065 중요!

세 점 $A(0, 2)$, $B(2, 4)$, $C(8, -4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하시오.

두 점 사이의 거리를 이용하여 삼각형 ABC의 각 변의 길이를 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(4-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(8-2)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{100}=10$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(0-8)^2+\{2-(-4)\}^2}=\sqrt{100}=10$$

이므로 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

답 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

066

세 점 $A(2, 2)$, $B(4, 0)$, $C(a, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a, b의 값을 각각 구하시오. (단, 점 C는 제1사분면 위에 있다.)

두 점 사이의 거리를 이용하여 삼각형 ABC의 각 변의 길이를 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(a-4)^2+(b-0)^2}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(2-a)^2+(2-b)^2}$$

이다. 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이고,

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2 \quad \Rightarrow \quad 8=(a-4)^2+b^2 \qquad \cdots ㉠$$

$$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2 \quad \Rightarrow \quad (a-4)^2+b^2=(2-a)^2+(2-b)^2 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉡에서 $a-2=b$이고 이를 ㉠에 대입하면

$$a^2-6a+6=0 \quad \Rightarrow \quad a=3\pm\sqrt{3}$$

이다. 따라서 $b=1\pm\sqrt{3}$(복호동순)이다. 이때, 점 C는 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$, $b>0$이다. 즉, $a=3+\sqrt{3}$, $b=1+\sqrt{3}$이다.

답 $a=3+\sqrt{3}$, $b=1+\sqrt{3}$

067

세 점 $A(a, a)$, $B(1, 1)$, $C(a+1, -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각삼각형일 때, a의 값을 구하시오.

두 점 사이의 거리를 이용하여 삼각형 ABC의 각 변의 길이를 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+(1-a)^2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(a+1-1)^2+(-1-1)^2}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(a-a-1)^2+(a+1)^2}$$

이다. 삼각형 ABC가 각 A가 직각인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2 \quad \Rightarrow \quad a(a-1)=0$$

에서 $a=0$ 또는 $a=1$이다. 이때, 점 A와 점 B는 서로 다른 점이므로 $a\neq1$이다. 따라서 $a=0$이다.

답 0

개념 03. 선분의 길이의 합의 최솟값

1. 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$가 성립한다.
2. 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 $P(x, y)$로 놓고 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$을 전개한 후 이차함수의 최솟값을 구한다.

068

실수 x, y에 대하여

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

의 최솟값을 구하시오.

$A(3, -1)$, $B(-2, 1)$, $P(x, y)$로 놓으면 주어진 식은 $\overline{AP}+\overline{BP}$와 같으므로

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$$
$$=\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+\{1-(-1)\}^2}=\sqrt{29}$$

이고 등호는 점 P가 선분 AB 위의 점일 때 성립한다. 따라서 구하는 식의 최솟값은 $\sqrt{29}$이다.

답 $\sqrt{29}$

069 중요

두 점 $A(4, 5)$, $B(2, 6)$과 x축 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은?

① 35 ② 42 ③ 49
④ 56 ⑤ 63

점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\{(a-4)^2+(0-5)^2\}+\{(a-2)^2+(0-6)^2\}$$
$$=a^2-8a+16+25+a^2-4a+4+36$$
$$=2a^2-12a+81=2(a-3)^2+63$$

에서 $a=3$일 때, 최솟값 63을 가진다.

답 ⑤

070

세 점 $A(-2, -1)$, $B(3, 8)$, $C(4, 0)$과 직선 $y=x+2$ 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값을 최소로 하는 점 P의 좌표를 구하시오.

점 P의 좌표를 $(a, a+2)$로 놓으면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$$
$$=\{(a+2)^2+(a+3)^2\}+\{(a-3)^2+(a-6)^2\}$$
$$+\{(a-4)^2+(a+2)^2\}$$
$$=6a^2-12a+78=6(a-1)^2+72$$

에서 $a=1$일 때, 최솟값 72를 가진다. 따라서 점 P의 좌표는 $(1, 3)$이다.

답 $P(1, 3)$

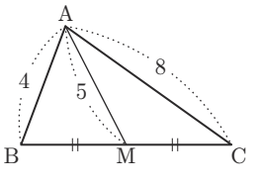
개념 04. 중선정리

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

071

그림과 같은 삼각형 ABC에서 점 M은 변 BC의 중점이다. $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=8$, $\overline{AM}=5$일 때, 선분 BM의 길이는?



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$
③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

이므로 $4^2+8^2=2(5^2+\overline{BM}^2)$에서 $\overline{BM}^2=15$이다. 따라서 $\overline{BM}=\sqrt{15}$이다.

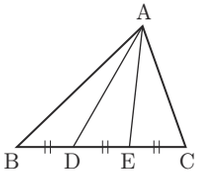
답 ⑤

072 중요

다음은 삼각형 ABC에서 변 BC를 삼등분하는 두 점 D, E에 대하여

$$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2)$$

이 성립함을 보이는 과정이다.



삼각형 ABE에서 중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2+\boxed{\text{(가)}}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2) \quad \cdots ㉠$$

이고, 삼각형 ADC에서 중선정리에 의하여

$$\overline{AD}^2+\boxed{\text{(나)}}^2=2(\boxed{\text{(가)}}^2+\overline{DE}^2) \quad \cdots ㉡$$

이다. ㉡×2에서

$$2\overline{AD}^2=4\boxed{\text{(가)}}^2+4\overline{DE}^2-2\boxed{\text{(나)}}^2$$

을 ㉠에 대입하면

$$\overline{AB}^2+\boxed{\text{(가)}}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{DE}^2$$
$$=4\boxed{\text{(가)}}^2+6\overline{DE}^2-2\boxed{\text{(나)}}^2$$

이다. 위 식을 정리하면 $\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2)$이 성립한다.

위에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 쓰시오.

답 (가): $\overline{AE}$ (나): $\overline{AC}$

개념 05. 선분을 내분하는 점

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P와 선분 AB의 중점 M의 좌표는 (단, $m>0$, $n>0$)

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right), \quad M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

073 중요!

두 점 $A(-2, a)$, $B(b, 5)$에 대하여 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점의 좌표가 $(2, 2)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

선분 AB를 2:3으로 내분하는 점의 좌표가 $(2, 2)$이므로

$$2=\frac{2\cdot b+3\cdot(-2)}{2+3}, \quad 2=\frac{2\cdot 5+3\cdot a}{2+3}$$

에서 $a=0$, $b=8$이므로 $a+b=8$이다.

답 8

074

두 점 $A(-3, a)$, $B(4, 8)$에 대하여 선분 AB를 1:4로 내분하는 점이 직선 $y=x$ 위에 있을 때, a의 값을 구하시오.

선분 AB를 1:4로 내분하는 점의 좌표를 (b, b)로 놓으면

$$b=\frac{1\cdot 4+4\cdot(-3)}{1+4}=-\frac{8}{5}, \quad b=\frac{1\cdot 8+4\cdot a}{1+4}=\frac{8+4a}{5}$$

에서 $-8=8+4a$이므로 $a=-4$이다.

답 -4

075

두 점 $A(2, -2)$, $B(6, 2)$에 대하여 선분 AB를 3:1로 내분하는 점 C가 선분 PQ의 중점과 일치한다. 두 점 P, Q의 좌표가 $P(7, -1)$, $Q(a, b)$일 때, a, b의 값을 각각 구하시오.

선분 AB를 3:1로 내분하는 점의 좌표를 $C(x, y)$라 하면

$$x=\frac{3\cdot 6+1\cdot 2}{3+1}=5, \quad y=\frac{3\cdot 2+1\cdot(-2)}{3+1}=1$$

이므로 C(5, 1)이다. 점 C가 선분 PQ의 중점과 일치하므로

$$5=\frac{7+a}{2}, \quad 1=\frac{-1+b}{2}$$

에서 $a=3$, $b=3$이다.

답 $a=3$, $b=3$

개념 06. 선분을 외분하는 점

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는 (단, $m>0$, $n>0$, $m\neq n$)

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

076

두 점 $A(2, a)$, $B(8, -1)$에 대하여 선분 AB를 2:1로 외분하는 점의 좌표가 $(b, 5)$일 때, $b-a$의 값은?

① 7 ② 14 ③ 21
④ 28 ⑤ 35

선분 AB를 2:1로 외분하는 점의 좌표가 $(b, 5)$이므로

$$b=\frac{2\cdot 8-1\cdot 2}{2-1}=14, \quad 5=\frac{2\cdot(-1)-1\cdot a}{2-1}$$

에서 $a=-7$, $b=14$이다. 따라서 $b-a=14-(-7)=21$이다.

답 ③

077 중요!

두 점 $A(-3, 1)$, $B(3, 7)$에 대하여 선분 AB의 연장선 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}=4\overline{BC}$이다. 이때, 선분 AC의 중점의 좌표를 구하시오.

$\overline{AC}=4\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=4:1$이고 점 C가 선분 AB의 연장선 위의 점이므로 점 C는 선분 AB를 4:1로 외분하는 점이다. 따라서 점 $C(x, y)$의 좌표는

$$x=\frac{4\cdot 3-1\cdot(-3)}{4-1}=5, \quad y=\frac{4\cdot 7-1\cdot 1}{4-1}=9$$

에서 C(5, 9)이다. 그러므로 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{5-3}{2}, \frac{9+1}{2}\right)$, 즉 $(1, 5)$이다.

답 $(1, 5)$

078

두 점 $A(2, -4)$, $B(6, 4)$에 대하여 선분 AB를 3:1로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점 M의 좌표를 구하시오.

두 점 P, Q의 좌표를 구하면

$$P\left(\frac{3\cdot 6+1\cdot 2}{3+1}, \frac{3\cdot 4+1\cdot(-4)}{3+1}\right) \Rightarrow P(5, 2)$$

$$Q\left(\frac{3\cdot 6-1\cdot 2}{3-1}, \frac{3\cdot 4-1\cdot(-4)}{3-1}\right) \Rightarrow Q(8, 8)$$

이다. 따라서 선분 PQ의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 놓으면

$$x=\frac{5+8}{2}=\frac{13}{2}, \quad y=\frac{2+8}{2}=5$$

에서 $M\left(\frac{13}{2}, 5\right)$이다.

답 $M\left(\frac{13}{2}, 5\right)$

개념 07. 선분을 내분하는 점, 외분하는 점의 활용

1. 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.
2. 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D, 각 A의 외각의 이등분선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 E라 하면
 (1) $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
 (2) $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}$

079

네 점 A$(-1, 2)$, B$(2, 4)$, C$(-5, -4)$, D(a, b)를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1-5}{2}=\frac{2+a}{2},\quad \frac{2-4}{2}=\frac{4+b}{2}$$

에서 $a=-8$, $b=-6$이다. 따라서 $a-b=-2$이다.

답 ①

080

두 점 A$(-2, 6)$, B$(4, 2)$에 대하여 선분 AB를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점 P가 제1사분면 위에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

점 P가 선분 AB를 $m:(1-m)$로 내분하는 점이므로 $m>0$, $1-m>0$에서 $0<m<1$이다. 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{m\cdot 4+(1-m)\cdot(-2)}{m+1-m},\quad y=\frac{m\cdot 2+(1-m)\cdot 6}{m+1-m}$$

에서 $x=6m-2$, $y=-4m+6$이다. 점 P가 제1사분면 위에 있으므로

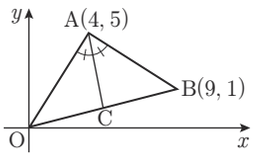
$$x=6m-2>0,\quad y=-4m+6>0$$

을 만족시킨다. 두 부등식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{3}<m<\frac{3}{2}$이고, m은 $0<m<1$을 만족하므로 실수 m의 값의 범위는 $\frac{1}{3}<m<1$이다.

답 $\frac{1}{3}<m<1$

081 중요

오른쪽 그림과 같이 세 점 O$(0, 0)$, A$(4, 5)$, B$(9, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 변 OB 위에 점 C가 있다. 선분 AC가 각 OAB를 이등분할 때, 점 C의 좌표를 구하시오.



선분 OA, AB의 길이를 각각 구하면

$$\overline{OA}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(9-4)^2+(1-5)^2}=\sqrt{41}$$

이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{OC}:\overline{BC}=\overline{OA}:\overline{AB}=1:1$$

이다. 따라서 점 C는 선분 OB의 중점이고 그 좌표는 $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

답 C$\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$

개념 08. 삼각형의 무게중심

좌표평면 위의 세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

082 중요

세 점 A$(-b, -2)$, B$(-1, b)$, C$(a, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, 2)$일 때, $a+b$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$$\frac{-b-1+a}{3}=1,\quad \frac{-2+b+5}{3}=2$$

에서 $b=3$이고 $a=7$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=10$이다.

답 ③

083

삼각형 A$(-4, 0)$, B$(5, 3)$, C$(8, 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA를 각각 2:3으로 내분하는 점을 차례로 P, Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 구하시오.

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표와 일치하므로 구하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{-4+5+8}{3}=3,\quad y=\frac{0+3+6}{3}=3$$

이므로 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는 $(3, 3)$이다.

답 $(3, 3)$

084

삼각형 ABC에서 A$(3, -2)$이고 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(5, 2)$일 때, 선분 BC의 중점의 좌표를 구하시오.

선분 BC의 중점의 좌표를 M(x, y)라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심은 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이므로

$$5=\frac{2\cdot x+1\cdot 3}{2+1},\quad 2=\frac{2\cdot y+1\cdot(-2)}{2+1}$$

에서 $x=6$, $y=4$이다. 따라서 선분 BC의 중점의 좌표는 $(6, 4)$이다.

답 $(6, 4)$

085

두 점 A(3, −1), B(−6, 2)에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점의 좌표가 (−15, 5)일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구하시오. (단, $m>n>0$)

선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점의 좌표는

$$-15=\frac{m\cdot(-6)-n\cdot3}{m-n},\quad 5=\frac{m\cdot2-n\cdot(-1)}{m-n}$$

이다. 식을 풀면 $m=2n$이므로 $m:n=2:1$이다. 따라서 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{2\cdot(-6)+1\cdot3}{2+1}=-3,\quad y=\frac{2\cdot2+1\cdot(-1)}{2+1}=1$$

에서 (−3, 1)이다.

답 (−3, 1)

086

세 점 A(−4, 0), B(2, 0), C(0, 2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심 P의 좌표를 구하시오.

삼각형 ABC의 외심 P에서 각 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같으므로

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$$

이 성립한다. P(x, y)로 놓으면

$$\overline{PA}=\sqrt{(x+4)^2+y^2}\quad\cdots\ ㉠$$

$$\overline{PB}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\quad\cdots\ ㉡$$

$$\overline{PC}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\quad\cdots\ ㉢$$

에서 ㉠=㉡을 풀면 $x=-1$이다. $x=-1$을 ㉡=㉢에 대입하면 $y=-1$이다. 따라서 외심 P의 좌표는 (−1, −1)이다.

답 P(−1, −1)

087 마 타

선분 AB의 4등분점을 점 A에서 가까운 순서대로 각각 C, D, E라 하자. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 점 A는 선분 CE를 3:1로 외분하는 점이다.

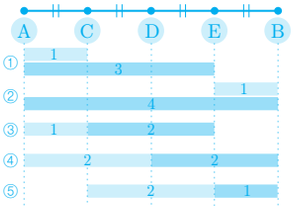
② 점 B는 선분 AE를 4:1로 외분하는 점이다.

③ 점 C는 선분 AE를 1:2로 내분하는 점이다.

④ 점 D는 선분 AB의 중점이다.

⑤ 점 E는 선분 CB를 2:1로 내분하는 점이다.

선분 AB의 4등분점을 점 A에서 가까운 순서대로 각각 C, D, E라 놓으면 두 점 사이의 거리의 비가 각각 그림과 같다.



이때, ①에서 점 A는 선분 CE를 1:3으로 외분하는 점이므로 옳지 않다.

답 ①

088

세 점 O(0, 0), A(7, 0), B(8, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 변 OA 위에 한 점 C가 있다. $\overline{BC}^2+\overline{OC}^2$의 값이 최소일 때, $\overline{OC}:\overline{AC}$를 구하시오.

두 점 O, A가 모두 x축 위에 있으므로 점 C의 좌표를 $(a, 0)$ (단, $0\le a\le7$)으로 놓을 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2+\overline{OC}^2&=(8-a)^2+4^2+a^2\\&=2a^2-16a+80\\&=2(a-4)^2+48\end{aligned}$$

이므로 $a=4$일 때, 최솟값 48을 가진다. 이때 $\overline{OC}=4$, $\overline{AC}=3$이므로 $\overline{OC}:\overline{AC}=4:3$이다.

답 4:3

서술형

089

세 점 A(−2, 2), B(4, 10), C(8, 7)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 각 B의 이등분선이 변 AC와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD와 삼각형 BCD의 넓이의 비는?

① 1:1 ② 1:2 ③ 2:1
④ 2:3 ⑤ 3:2

변 AB, BC의 길이를 각각 구하면

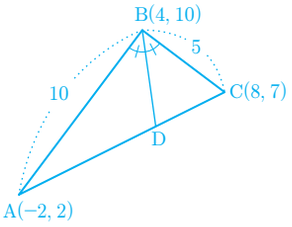
$\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(10-2)^2}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{(8-4)^2+(7-10)^2}=5$

이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$이다. 이때, 선분 BD가 각 B의 이등분선이므로

$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$

이 성립한다. 따라서 삼각형 ABD와 삼각형 BCD의 넓이의 비도 2:1이다.



답 ③

090

좌표평면 위의 점 A(−4, 3)에서 $4\sqrt{2}$만큼 떨어진 y축 위의 두 점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구하시오.

점 A에서 $4\sqrt{2}$만큼 떨어진 y축 위의 점의 좌표를 $(0, a)$라 놓으면

$\sqrt{(0+4)^2+(a-3)^2}=\sqrt{a^2-6a+25}=4\sqrt{2}$

이다. 양변을 제곱하면 $a^2-6a+25=32$이고, 이 이차방정식을 풀면

$a^2-6a-7=(a+1)(a-7)=0$

에서 $a=-1$ 또는 $a=7$이다. 따라서 두 점 B, C의 좌표를 $(0, -1)$, $(0, 7)$이라 할 수 있고 $\overline{BC}=|7-(-1)|=8$이다. 이때, $\overline{AB}=\overline{AC}=4\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $8+2\cdot4\sqrt{2}=8+8\sqrt{2}$이다.

답 $8+8\sqrt{2}$

091

두 점 A(0, 3), B(5, −2)에 대하여 선분 AB를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점 P가 x축 위의 점이다. 이때, 점 P의 좌표와 선분 AB를 $m:(1+m)$으로 외분하는 점 Q의 좌표를 각각 구하시오.

점 P가 선분 AB를 $m:(1-m)$로 내분하므로 $m>0$, $1-m>0$에서 $0<m<1$이다.
선분 AB를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{m\times5+(1-m)\times0}{m+(1-m)}, \frac{m\times(-2)+(1-m)\times3}{m+(1-m)}\right)$

에서 $P(5m, -5m+3)$이다. [35%]

이때, 점 P는 x축 위의 점이므로 $-5m+3=0$에서 $m=\frac{3}{5}$이다. 즉, 점 P의 좌표는 $(3, 0)$이다. [30%]

이제 선분 AB를 $m:(1+m)$ 즉, $\frac{3}{5}:\frac{8}{5}=3:8$로 외분하는 점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{3\times5-8\times0}{3-8}=-3, \quad y=\frac{3\times(-2)-8\times3}{3-8}=6$

에서 Q(−3, 6)이다. [35%]

답 P(3, 0), Q(−3, 6)

092

오른쪽 그림과 같이 동서, 남북 방향의 사거리 교차로가 있다. 교차로의 중심을 O라 할 때, 마타와 수학이가 각각 O지점에서 서쪽으로 5 km 떨어진 지점과 남쪽으로 10 km 떨어진 지점에서 동시에 출발하여 마타는 동쪽으로 시속 4 km, 수학이는 북쪽으로 시속 3 km의 속도로 걸어가고 있다. 이 두 사람이 가장 가까이 있을 때, 두 사람 사이의 거리를 구하시오. (단, 도로의 폭은 무시한다.)



O지점을 좌표평면의 원점 O에 놓고, 동서 방향의 도로를 x축으로, 남북 방향의 도로를 y축으로 놓으면 출발한 지 t시간 후의 마타의 위치는 $(4t-5, 0)$, 수학이의 위치는 $(0, 3t-10)$으로 놓을 수 있다. [25%]

이때, 마타와 수학이 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(4t-5)^2+(3t-10)^2}$

$=5\sqrt{t^2-4t+5}$

$=5\sqrt{(t-2)^2+1}$

에서 $t=2$일 때, d는 최솟값 5를 가진다. [50%]

따라서 마타와 수학이가 가장 가까이 있을 때의 거리는 5 km이다. [25%]

답 5 km

11 직선의 방정식

01 직선의 방정식

1. 직선의 방정식

(1) 한 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$

(2) 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$
(단, $x_1 \neq x_2$)

(3) x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식은 $\boldsymbol{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$이다. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

2. 직선의 방정식의 일반형

x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$의 꼴 (단, $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$)

3. m의 값에 관계없이 지나는 점

직선 $(x-x_1)m+y-y_1=0$은 m의 값에 관계없이 점 (x_1, y_1)을 항상 지난다.

02 두 직선의 위치 관계

1. 두 직선의 위치 관계

두 직선의 위치 관계	서로 평행하다.	일치한다.	한 점에서 만난다.	서로 수직이다.
$y=mx+n$과 $y=m'x+n'$	$m=m'$, $n \neq n'$	$m=m'$, $n=n'$	$m \neq m'$	$mm'=-1$
$ax+by+c=0$과 $a'x+b'y+c'=0$	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$	$\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$	$aa'+bb'=0$

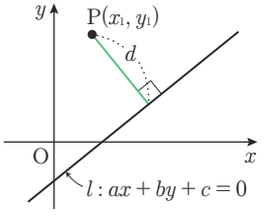
2. 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 한 점에서 만날 때, 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$이다. (단, k는 실수이다.)

03 점과 직선 사이의 거리

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 **거리** d는

$$\boldsymbol{d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



마·타·노·트

▶ 축에 평행한 직선의 방정식

한 점 (x_1, y_1)을 지나고

1. x축에 평행한 직선은 $y=y_1$
2. y축에 평행한 직선은 $x=x_1$

▶ 직선의 방정식의 표준형

$y=mx+n$의 꼴을 직선의 방정식의 표준형이라 한다.

▶ 평행한 두 직선 사이의 거리

평행한 두 직선

$l_1: ax+by+c_1=0$

$l_2: ax+by+c_2=0$

사이의 거리 d는 직선 l_2 위의 한 점 (p, q)와 직선 l_1 사이의 거리이다.

즉,

$$d=\frac{|ap+bq+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

개념 확인

정답 및 풀이 p.16

[469 ~ 473] 다음 직선의 방정식을 구하시오.

093 기울기가 -1이고 y절편이 3인 직선

기울기가 -1이고 y절편이 3인 직선의 방정식은 $y=-x+3$이다.

답 $y=-x+3$

094 기울기가 2이고 점 $(1, -1)$을 지나는 직선

기울기가 2이고 점 $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y+1=2(x-1)$에서 $y=2x-3$이다.

답 $y=2x-3$

095 두 점 $(-2, 1)$, $(2, 5)$를 지나는 직선

두 점 $(-2, 1)$, $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-1=\frac{5-1}{2+2}(x+2)$에서 $y=x+3$이다.

답 $y=x+3$

096 두 점 $(2, 3)$, $(2, -5)$를 지나는 직선

직선 위의 두 점의 x좌표가 같으므로 $x=2$이다.

답 $x=2$

097 x절편이 4, y절편이 2인 직선

x절편이 4, y절편이 2인 직선의 방정식은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$이고 이를 y에 대하여 정리하면 $y=-\frac{1}{2}x+2$이다.

답 $y=-\frac{1}{2}x+2$

[474 ~ 476] 다음 두 직선의 위치 관계를 구하시오.

098 $x-2y+3=0$, $2x+y+3=0$

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+y+3=0$에 대하여 $1\cdot2+(-2)\cdot1=0$이므로 주어진 두 직선은 서로 수직이다.

답 서로 수직이다.

099 $2x+y-4=0$, $y=-2x+4$

직선 $2x+y-4=0$을 표준형으로 변형하면 $y=-2x+4$이므로 주어진 두 직선은 일치한다.

답 일치한다.

100 $x-3y+6=0$, $y=\frac{1}{3}x+4$

직선 $x-3y+6=0$을 표준형으로 변형하면 $y=\frac{1}{3}x+2$이고 이 직선이 직선 $y=\frac{1}{3}x+4$와 기울기가 같고 y절편이 다르므로 두 직선은 서로 평행하다.

답 서로 평행하다.

[477 ~ 479] 다음 조건을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

101 두 직선 $x-ay+3=0$, $-4x-2y+5=0$이 서로 수직

두 직선 $x-ay+3=0$, $-4x-2y+5=0$이 서로 수직이면 $1\cdot(-4)+(-a)\cdot(-2)=0$에서 $a=2$이다.

답 2

102 두 직선 $ax+y+4=0$, $6x+2y-1=0$이 서로 평행

두 직선 $ax+y+4=0$, $6x+2y-1=0$이 서로 평행하면 $\frac{a}{6}=\frac{1}{2}\neq\frac{4}{-1}$에서 $a=3$

답 3

103 두 직선 $3x-5y-1=0$, $6x-ay-2=0$이 일치

두 직선 $3x-5y-1=0$, $6x-ay-2=0$이 일치하면 $\frac{3}{6}=\frac{-5}{-a}=\frac{-1}{-2}$에서 $a=10$

답 10

[480 ~ 482] 다음 직선의 방정식을 구하시오.

104 직선 $y=2x-4$에 수직이고 점 $(1, 3)$을 지나는 직선

직선 $y=2x-4$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 이 직선이 점 $(1, 3)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}(x-1)+3$에서 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$이다.

답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

105 직선 $3x+y=5$에 평행하고 점 $(-1, 2)$를 지나는 직선

직선 $3x+y=5$를 표준형으로 변형하면 $y=-3x+5$이고 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 -3이다. 따라서 기울기가 -3이고 점 $(-1, 2)$를 지나는 직선은 $y=-3(x+1)+2$에서 $y=-3x-1$이다.

답 $y=-3x-1$

106 x축과 평행하고 점 $(4, 6)$을 지나는 직선

x축과 평행하고 점 $(4, 6)$을 지나는 직선은 $y=6$이다.

답 $y=6$

[483 ~ 484] 다음 주어진 점과 직선 사이의 거리를 구하시오.

107 점 $(1, -2)$, 직선 $3x-4y+4=0$

점 $(1, -2)$와 직선 $3x-4y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+8+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

답 3

108 점 $(3, 1)$, 직선 $y=-2x-3$

직선 $y=-2x-3$을 일반형으로 변형하면 $2x+y+3=0$이다. 따라서 점 $(3, 1)$과 직선 $2x+y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6+1+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

답 $2\sqrt{5}$

개념 적용

개념 01. 직선의 방정식

1. 한 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$이다.
2. 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$이다. (단, $x_1 \neq x_2$)
3. x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

109 중요

두 점 $A(2, -6)$, $B(4, 2)$에 대하여 선분 AB의 중점을 지나고 기울기가 3인 직선이 점 $(5, a)$를 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) \Rightarrow (3, -2)$$

이다. 점 $(3, -2)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y+2=3(x-3) \Rightarrow y=3x-11$$

이고 이 직선이 점 $(5, a)$를 지나므로 $a=15-11=4$이다.

답 ④

110

세 점 $(-2, 0)$, $(1, 1)$, $(k, 4)$가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

두 점 $(-2, 0)$, $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1-0}{1+2}(x+2) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

이고 이 직선이 점 $(k, 4)$를 지나므로 $4=\frac{1}{3}k+\frac{2}{3}$에서 $k=10$이다.

답 10

111

y절편이 x절편의 2배이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식이 $y=mx+n$일 때, $m+n$의 값은? (단, $n \neq 0$)

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

x절편을 a라 하면 y절편은 $2a$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1$$

이다. (단, $a \neq 0$) 이 직선이 점 $(3, 4)$를 지나므로

$$\frac{3}{a}+\frac{4}{2a}=1 \Rightarrow a=5$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$이고 양변에 10을 곱한 뒤 y에 대하여 정리하면 $y=-2x+10$이다. 따라서 $m=-2$, $n=10$에서 구하는 값은 $m+n=8$

답 ②

개념 02. 직선의 개형

직선 $ax+by+c=0$에서

1. $b \neq 0$이면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로 기울기와 x절편, y절편의 부호를 알 수 있다.
2. $b=0$이면 x축에 수직인 직선이다.

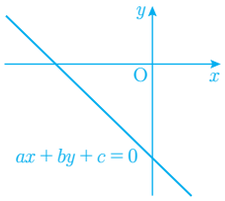
112 중요

세 실수 a, b, c가 $ab>0$, $bc>0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.

$b \neq 0$이므로 주어진 직선의 방정식을 표준형으로 변형하면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이다.
이때 $ab>0$, $bc>0$에서

$$\text{기울기}=-\frac{a}{b}<0, \quad y\text{절편}=-\frac{c}{b}<0$$

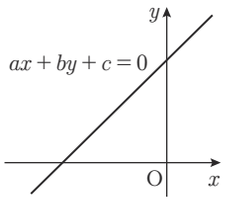
이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 따라서 주어진 직선은 제2, 3, 4사분면을 지난다.



답 제2, 3, 4사분면

113

직선 $ax+by+c=0$의 개형이 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $bx-cy+a=0$이 지나지 않는 사분면을 구하시오.



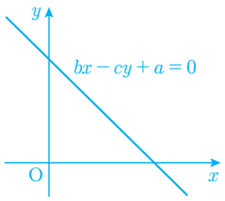
$b=0$이면 직선 $ax=-c$는 y축과 평행한 직선이므로 $b \neq 0$이다. 직선 $ax+by+c=0$을 표준형으로 변형하면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$에서 기울기, x절편, y절편의 부호는

$$\text{기울기}=-\frac{a}{b}>0, \ x\text{절편}=-\frac{c}{a}<0, \ y\text{절편}=-\frac{c}{b}>0$$

이다. 따라서 $ab<0$, $ac>0$, $bc<0$이다. 한편 $c \neq 0$이므로 직선 $bx-cy+a=0$을 표준형으로 변형하면 $y=\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$에서

$$\text{기울기}=\frac{b}{c}<0, \quad y\text{절편}=\frac{a}{c}>0$$

이므로 직선 $bx-cy+a=0$은 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

114

0이 아닌 세 실수 a, b, c가

$$|a|=-a, \quad |a-b|=a-b, \quad |a+c|=a+c$$

를 만족시킬 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.

$|a|=-a$이고 $a \neq 0$이면 $a<0$이므로

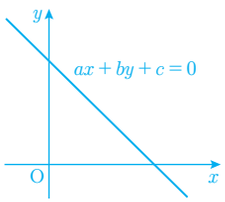
$$|a-b|=a-b \Rightarrow a-b \geq 0 \Rightarrow b \leq a<0$$

$$|a+c|=a+c \Rightarrow a+c \geq 0 \Rightarrow c \geq -a>0$$

이다. 직선 $ax+by+c=0$을 표준형으로 변형하면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$에서

$$\text{기울기}=-\frac{a}{b}<0, \quad y\text{절편}=-\frac{c}{b}>0$$

이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같고 제1, 2, 4사분면을 지난다.



답 제1, 2, 4사분면

개념 03. 도형과 직선

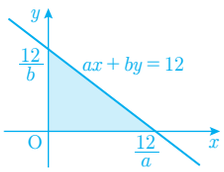
1. 주어진 도형에서 직선으로 이루어진 부분을 미지수를 이용하여 직선의 방정식을 세운다.
2. 조건을 이용하여 방정식을 풀어서 미지수를 구한다.

115

좌표평면에서 직선 $ax+by=12$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 18일 때, 두 양수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

직선 $ax+by=12$의 x절편은 $\frac{12}{a}$이고 y절편은 $\frac{12}{b}$이다. a, b가 양수이므로 직선 $ax+by=12$는 오른쪽 그림과 같다. 즉, 주어진 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가 $\frac{12}{a}$이고 높이가 $\frac{12}{b}$인 삼각형이다. 삼각형의 넓이가 18이므로



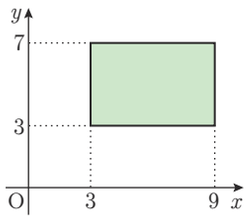
$$\frac{1}{2}\times\frac{12}{a}\times\frac{12}{b}=\frac{72}{ab}=18$$

에서 구하는 값은 $ab=4$이다.

답 ②

116 중요

직선 $y=mx+n$이 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 넓이를 이등분하고 점 $(1, -5)$를 지날 때, $m-n$의 값을 구하시오.



주어진 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점, 즉 두 점 $(3, 3)$, $(9, 7)$을 지나는 선분의 중점

$$\left(\frac{3+9}{2}, \frac{3+7}{2}\right) \Rightarrow (6, 5)$$

를 지난다. 두 점 $(1, -5)$, $(6, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y+5=\frac{5+5}{6-1}(x-1) \Rightarrow y=2x-7$$

이므로 $m=2$, $n=-7$에서 구하는 값은 $m-n=9$이다.

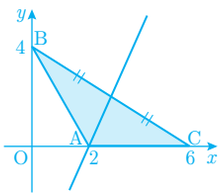
답 9

117

세 점 A$(2, 0)$, B$(0, 4)$, C$(6, 0)$에 대하여 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y=x-2$ ② $y=2x-4$ ③ $y=3x-6$
④ $y=4x-8$ ⑤ $y=5x-10$

점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점



$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}\right) \Rightarrow (3, 2)$$

를 지난다. 따라서 구하는 직선은 두 점 $(2, 0)$, $(3, 2)$를 지나는 직선이므로

$$y=\frac{2-0}{3-2}(x-2)=2x-4$$

에서 $y=2x-4$이다.

답 ②

개념 04. 두 직선의 위치 관계

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$에 대하여

1. 서로 평행: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$
2. 일치: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$
3. 서로 수직: $aa'+bb'=0$

118 중요

두 직선 $2x+(a+1)y+1=0$, $3x-ay+4=0$이 서로 수직일 때, 모든 실수 a의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

두 직선 $2x+(a+1)y+1=0$, $3x-ay+4=0$이 서로 수직이므로

$$6-a(a+1)=0 \Rightarrow a^2+a-6=0$$

에서 $(a-2)(a+3)=0$이다. 따라서 $a=2$ 또는 $a=-3$이고 구하는 a의 값의 합은 -1이다.

답 ②

119

직선 $2x+ay-1=0$이 직선 $3x-by+4=0$에 수직이고, 직선 $2x-(b-5)y+3=0$에 평행할 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

두 직선 $2x+ay-1=0$, $3x-by+4=0$이 서로 수직이므로

$$2\cdot 3+a\cdot(-b)=0 \Rightarrow ab=6$$

이고 두 직선 $2x+ay-1=0$, $2x-(b-5)y+3=0$이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{2}=\frac{a}{-(b-5)}\neq\frac{-1}{3} \Rightarrow a+b=5$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=25-2\cdot 6=13$$

답 13

120

세 직선 $x+2y-8=0$, $2x-y-1=0$, $x+ay-5=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

세 직선을 각각 $\begin{cases} x+2y-8=0 & \cdots ㉠ \\ 2x-y-1=0 & \cdots ㉡ \\ x+ay-5=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 하자. 두 직선 ㉠, ㉡에 대하여 $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{-1}$이므로 서로 평행하지 않다. 세 직선이 모두 평행한 경우는 없으므로 세 직선이 삼각형을 이루지 않도록 하는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우, $\frac{1}{1}=\frac{2}{a}\neq\frac{-8}{-5}$이므로 $a=2$이다.

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우, $\frac{2}{1}=\frac{-1}{a}\neq\frac{-1}{-5}$이므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우, 직선 ㉢이 두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 지난다. 두 방정식 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$이므로 직선 ㉢이 점 $(2, 3)$을 지난다. 즉, $2+3a-5=0$에서 $a=1$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 $2-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$이다.

답 $\frac{5}{2}$

개념 05. 수직이등분선

선분 AB의 수직이등분선은 직선 AB에 수직이고, 선분 AB의 중점을 지나는 직선이다.

121 중요

두 점 A(2, −3), B(4, 1)을 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식이 $ax+by-1=0$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① −2 ② −1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

선분 AB를 수직이등분하는 직선은 직선 AB에 수직이고 선분 AB의 중점을 지난다.
직선 AB의 기울기는 $\frac{1-(-3)}{4-2}=2$에서 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 선분 AB의 중점은 $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$에서 (3, −1)이다. 따라서 구하는 직선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 (3, −1)을 지나므로

$$y+1=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \Rightarrow \quad x+2y-1=0$$

에서 $a=1$, $b=2$이므로 구하는 값은 $ab=2$이다.

답 ⑤

122

두 점 A(5, 1), B(−1, 3)을 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선과 직선 $y=4x-8$의 교점의 좌표를 구하시오.

직선 AB의 기울기는

$$\frac{3-1}{-1-5}=-\frac{1}{3}$$

에서 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 기울기는 3이다. 또한 선분 AB의 중점은

$$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$$

이므로 (2, 2)이다. 따라서 선분 AB를 수직이등분하는 직선은 기울기가 3이고 점 (2, 2)를 지나므로

$$y-2=3(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=3x-4$$

이다. 따라서 두 직선의 방정식

$$y=3x-4, \quad y=4x-8$$

을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=8$이므로 교점의 좌표는 (4, 8)이다.

답 (4, 8)

123

두 점 A(0, 3), B(a, b)를 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식이 $y=x-1$일 때, $a+2b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$)

직선 AB의 기울기는 $\frac{b-3}{a}$이고 선분 AB의 중점은 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$이다.

(i) 직선 $y=x-1$이 기울기가 $\frac{b-3}{a}$인 직선 AB에 수직이므로

$$1\cdot\frac{b-3}{a}=-1 \quad \Rightarrow \quad a+b=3 \qquad \cdots ㉠$$

(ii) 직선 $y=x-1$이 점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$을 지나므로

$$\frac{b+3}{2}=\frac{a}{2}-1 \quad \Rightarrow \quad a-b=5 \qquad \cdots ㉡$$

(i), (ii)로부터 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-1$이므로 $a+2b=2$이다.

답 2

개념 06. 직선이 항상 지나는 점

직선 $(x-x_1)m+y-y_1=0$은 m의 값에 관계없이 점 (x_1, y_1)을 항상 지난다.

124

실수 k의 값에 관계없이 직선 $(4k+2)x-(k-1)y+(2k-8)=0$이 항상 지나는 점을 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$$(4x-y+2)k+(2x+y-8)=0$$

이다. 이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4x-y+2=0, \quad 2x+y-8=0$$

이다. 이 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=6$이므로 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 (1, 6)을 항상 지난다. 따라서 $a=1$, $b=6$에서 구하는 값은 $a+b=7$이다.

답 ④

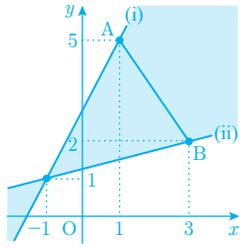
125 중요

직선 $mx-y+m+1=0$이 두 점 A(1, 5), B(3, 2)를 이은 선분 AB와 한 점에서 만날 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

주어진 직선의 방정식을 m에 대하여 정리하면

$$m(x+1)-(y-1)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이므로 이 직선은 m의 값에 관계없이 점 (−1, 1)을 지난다. 또한 ㉠을 표준형으로 나타내면 $y=mx+m+1$이므로 m은 직선 ㉠의 기울기이다. 따라서 직선 ㉠이 선분 AB와 한 점에서 만나기 위해서는 m의 값이 오른쪽 그림과 같이 두 점 (−1, 1), A(1, 5)를 지나는 직선의 기울기와 두 점 (−1, 1), B(3, 2)를 지나는 직선의 기울기 또는 그 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 A(1, 5)를 지날 때, $m\cdot 2-4=0$에서 $m=2$이다.
(ii) 직선 ㉠이 점 B(3, 2)를 지날 때, $m\cdot 4-1=0$에서 $m=\frac{1}{4}$이다.
(i), (ii)에 의하여 구하는 m의 값의 범위는 $\frac{1}{4}\leq m\leq 2$이다.

답 $\frac{1}{4}\leq m\leq 2$

126

두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-4=0$의 교점을 지나고, 직선 $3x-y+2=0$에 수직인 직선이 점 $(a, 1)$을 지날 때, a의 값을 구하시오.

두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-4=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x-2y+2+k(2x+y-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2k+1)x+(k-2)y-4k+2=0 \qquad \cdots ㉠$$

(단, k는 실수)이다. 직선 ㉠이 직선 $3x-y+2=0$과 서로 수직이므로

$$(2k+1)\cdot 3+(k-2)\cdot(-1)=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1$$

에서 $k=-1$이다. 이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $x+3y-6=0$이다. 이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로 $a+3-6=0$에서 $a=3$이다.

답 3

개념 07. 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

127

점 $(1, 1)$과 직선 $x-3y-6=0$ 사이의 거리와 점 $(1, 1)$과 직선 $3x+y+a=0$ 사이의 거리가 서로 같을 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

점 $(1, 1)$과 직선 $x-3y-6=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$$d_1=\frac{|1-3-6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{8}{\sqrt{10}}$$

이고 점 $(1, 1)$과 직선 $3x+y+a=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$$d_2=\frac{|3+1+a|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|a+4|}{\sqrt{10}}$$

이다. $d_1=d_2$이므로 $\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{|a+4|}{\sqrt{10}}$에서 $a=4$ 또는 $a=-12$이다. 따라서 양수 a의 값은 4이다.

답 ④

128 중요

직선 $(k+2)x-(k+1)y-k-4=0$은 실수 k의 값에 관계없이 점 A를 지난다. 점 A와 직선 $3x+4y+3=0$ 사이의 거리를 구하시오.

주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$$(x-y-1)k+(2x-y-4)=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 등식 ㉠이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때

$$x-y-1=0,\quad 2x-y-4=0$$

이고 두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $(3, 2)$이므로 점 A$(3, 2)$와 직선 $3x+4y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|9+8+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4$$

답 4

129

두 직선 $x-2y+8=0$, $ax+(a+3)y+2=0$이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리는? (단, a는 상수이다.)

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

두 직선 $x-2y+8=0$, $ax+(a+3)y+2=0$이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{a}=\frac{-2}{a+3}\neq\frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad a+3=-2a$$

에서 $a=-1$이다. 이를 $ax+(a+3)y+2=0$에 대입하여 정리하면 $x-2y-2=0$이다. 따라서 평행한 두 직선 $x-2y+8=0$, $x-2y-2=0$ 사이의 거리는 직선 $x-2y+8=0$ 위의 한 점 $(-8, 0)$과 직선 $x-2y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|-8-2|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

답 ②

개념 08. 점과 직선 사이의 거리의 응용

1. 삼각형의 세 점의 꼭짓점의 좌표가 주어졌을 때, 삼각형의 넓이는 한 선분을 밑변으로 하고, 그 선분 위에 있지 않은 다른 점과 선분 사이의 거리를 높이로 하여 구할 수 있다.
2. 두 직선 l, l'이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점 P에서 두 직선 l, l'까지의 거리가 서로 같다.

130 중요

세 점 A$(-1, 4)$, B$(3, 0)$, C$(a, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 12일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

삼각형 ABC의 밑변을 선분 AB로 놓으면

$$\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{2}$$

이고 삼각형 ABC의 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리와 같다. 직선 AB의 방정식은

$$y-4=\frac{0-4}{3-(-1)}(x+1) \quad \Rightarrow \quad x+y-3=0$$

이고 점 C$(a, 5)$와 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리는 $\frac{|a+5-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a+2|}{\sqrt{2}}$이다. 이때 삼각형 ABC의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{|a+2|}{\sqrt{2}}=12 \quad \Rightarrow \quad |a+2|=6$$

에서 $a=4$ 또는 $a=-8$이고 따라서 양수 a의 값은 4이다.

답 4

131

두 직선 $x-4y=0$, $4x+y+6=0$이 이루는 각의 이등분선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식을 구하시오.

각의 이등분선 위의 한 점을 P(x, y)라 하면 점 P와 주어진 두 직선 사이의 거리가 서로 같으므로

$$\frac{|x-4y|}{\sqrt{1+(-4)^2}}=\frac{|4x+y+6|}{\sqrt{4^2+1}}$$

에서 $|x-4y|=|4x+y+6|$이다. 절댓값을 풀면

$$x-4y=\pm(4x+y+6)$$

이고 각각의 경우에 대하여 정리하면

$$x-4y=4x+y+6 \quad \Rightarrow \quad 3x+5y+6=0$$

$$x-4y=-4x-y-6 \quad \Rightarrow \quad 5x-3y+6=0$$

에서 기울기가 양수인 직선의 방정식은 $5x-3y+6=0$이다.

답 $5x-3y+6=0$

132

점 $(1, -1)$과 직선 $x+3y-2+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때, $f(k)$의 최댓값은? (단, k는 실수이다.)

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

주어진 직선의 방정식을 정리하면 $(k+1)x+(k+3)y-2=0$이다. 점과 직선 사이의 거리에 의하여 $f(k)$는

$$f(k)=\frac{|(k+1)-(k+3)-2|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2+8k+10}}=\frac{4}{\sqrt{2(k+2)^2+2}}$$

이다. $f(k)$는 분모가 최소일 때 최대이므로 $k=-2$일 때, $2k^2+8k+10$은 최솟값 2를 가지고 $f(k)$는 최댓값 $2\sqrt{2}$를 가진다.

답 ③

133

두 점 (5, 2), (1, −2)를 이은 선분을 1:3으로 외분하는 점을 A라 할 때, 점 A를 지나고 x절편이 5인 직선의 방정식은?

① $y=2x-8$ ② $y=2x-10$ ③ $y=2x-12$

④ $y=3x-10$ ⑤ $y=3x-15$

두 점 (5, 2), (1, −2)를 이은 선분을 1:3으로 외분하는 점 A는

$$\left(\frac{1\cdot1-3\cdot5}{1-3},\ \frac{1\cdot(-2)-3\cdot2}{1-3}\right)$$

에서 A(7, 4)이다. 한편 구하는 직선은 x절편이 5이므로 점 (5, 0)을 지난다. 따라서 구하는 직선은 두 점 (5, 0), (7, 4)를 지나는 직선이므로

$$y=\frac{4-0}{7-5}(x-5)$$

에서 $y=2x-10$이다.

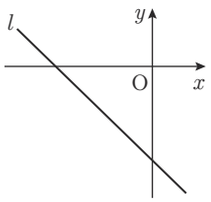
답 ②

134 마타

직선

$$l:(n-1)x-y+(n^2-n-6)=0$$

의 개형이 오른쪽 그림과 같도록 하는 정수 n의 개수는?



① 0 ② 1 ③ 2

④ 3 ⑤ 4

주어진 직선 l을 표준형으로 정리하면

$$y=(n-1)x+(n^2-n-6)$$

이다. 이때 주어진 직선의 개형이 그림과 같으면 직선의 기울기는 음수이고 y절편도 음수이다. 즉,

$$n-1<0 \ \Rightarrow\ n<1 \qquad \cdots ㉠$$

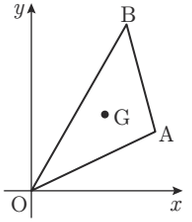
$$n^2-n-6=(n+2)(n-3)<0 \ \Rightarrow\ -2<n<3 \qquad \cdots ㉡$$

에서 n의 값의 범위는 ㉠과 ㉡의 공통범위로 $-2<n<1$이다. 따라서 정수인 n은 0, −1이고 그 개수는 2이다.

답 ③

135 기출

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에 세 점 O(0, 0), A(8, 4), B(7, a)와 삼각형 OAB의 무게중심 G(5, b)가 있다. 점 G와 직선 OA 사이의 거리가 $\sqrt{5}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.)



세 점 O(0, 0), A(8, 4), B(7, a)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{0+8+7}{3},\ \frac{0+4+a}{3}\right) \ \Rightarrow\ G\left(5,\ \frac{4+a}{3}\right)$$

이다. 즉, $\frac{4+a}{3}=b$이다. 한편 직선 OA의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$에서 $x-2y=0$이고 점 G(5, b)와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

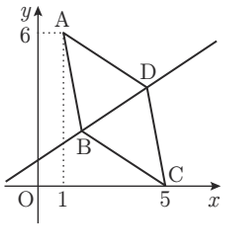
$$\frac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5} \ \Rightarrow\ |5-2b|=5$$

에서 $b=0$ 또는 $b=5$이다. 이때 $a>0$이고 $b=\frac{4+a}{3}$이므로 $a=11$, $b=5$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=16$이다.

답 16

136

오른쪽 그림과 같이 마름모 ABCD에 대하여 A(1, 6), C(5, 0)이고, 두 점 B, D를 지나는 직선은 점 $(a, 7)$을 지난다. a의 값을 구하시오.



마름모는 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로 두 점 B, D를 지나는 직선은 선분 AC를 수직이등분하는 직선이다. 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{0-6}{5-1}=-\frac{3}{2}$$

이므로 선분 BD의 기울기를 m이라 할 때,

$$m\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1 \ \Rightarrow\ m=\frac{2}{3}$$

이다. 또한 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{6+0}{2}\right) \ \Rightarrow\ (3, 3)$$

이다. 직선 BD는 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 점 (3, 3)을 지나므로 직선 BD의 방정식은

$$y=\frac{2}{3}(x-3)+3 \ \Rightarrow\ y=\frac{2}{3}x+1$$

이고 이 직선이 점 $(a, 7)$을 지나므로 $7=\frac{2}{3}a+1$에서 $a=9$이다.

답 9

137 마타

서로 다른 두 직선

$$l_1 : (k^2-6)x-2y+(k^2-4)=0$$

$$l_2 : 5x+(k^2+1)y+(k+2)=0$$

이 서로 평행하도록 하는 모든 상수 k의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

두 직선 l_1, l_2의 기울기가 같을 때, $\frac{k^2-6}{5}=\frac{-2}{k^2+1}$에서

$$(k^2-6)(k^2+1)=-10 \Rightarrow (k^2-1)(k^2-4)=0$$

이므로 $k=\pm1$ 또는 $k=\pm2$이다.

(i) $k=-2$일 때, 직선 l_1과 직선 l_2의 방정식에 각각 $k=-2$를 대입하여 정리하면 $x+y=0$이므로 두 직선 l_1, l_2는 일치한다.

(ii) $k=-1$일 때, $\frac{1-6}{5}=\frac{-2}{1+1}\neq\frac{1-4}{-1+2}$이므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 평행하다.

(iii) $k=1$일 때, $\frac{1-6}{5}=\frac{-2}{1+1}=\frac{1-4}{1+2}$이므로 두 직선 l_1, l_2는 일치한다.

(iv) $k=2$일 때, $\frac{4-6}{5}=\frac{-2}{4+1}\neq\frac{4-4}{2+2}$이므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 평행하다.

(i)~(iv)에 의하여 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하도록 하는 k의 값의 합은 $-1+2=1$이다.

답 ④

138

두 점 A$(-1, 0)$, B$(0, -2)$를 지나는 직선과 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값을 구하시오.

삼각형 ABP에서 밑변을 변 AB로 놓으면 $\overline{AB}=\sqrt{5}$이고 삼각형 ABP의 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리이다. 이때 직선 AB의 방정식은 $2x+y+2=0$이다. 따라서 점 P$(t, (t-2)^2)$과 직선 $2x+y+2=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|2t+(t-2)^2+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|(t-1)^2+5|}{\sqrt{5}}$$

에서 $(t-1)^2+5>0$이므로

$$d=\frac{|(t-1)^2+5|}{\sqrt{5}}=\frac{(t-1)^2+5}{\sqrt{5}}$$

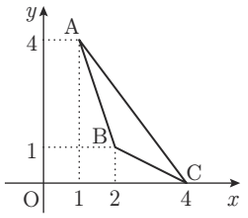
이다. 따라서 $t=1$일 때 d는 최솟값 $\sqrt{5}$를 가진다. 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot d$이므로 $t=1$일 때, 최솟값 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\frac{5}{2}$를 가진다.

답 $\frac{5}{2}$

서술형

139

세 점 A$(1, 4)$, B$(2, 1)$, C$(4, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 직선 $mx-y+2m+1=0$과 만나도록 하는 m의 값의 범위를 구하시오.



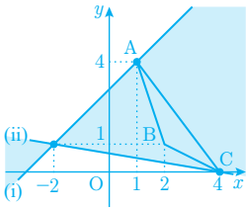
주어진 직선의 방정식 $mx-y+2m+1=0$을 m에 대하여 정리하면

$$m(x+2)-(y-1)=0 \quad \cdots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 $(-2, 1)$을 지난다. [20%]

직선 ㉠을 표준형으로 나타내면 $y=mx+2m+1$이므로 m은 직선 ㉠의 기울기이다. [10%]

직선 ㉠이 오른쪽 그림과 같이 색칠한 영역에 있을 때, 직선 ㉠은 삼각형 ABC와 만난다. 즉 기울기 m의 값이 두 점 $(-2, 1)$, A$(1, 4)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(-2, 1)$, C$(4, 0)$을 지나는 직선의 기울기 또는 그 사이에 있다.



(i) 직선 ㉠이 점 A를 지날 때,

$$m(1+2)-(4-1)=0 \Rightarrow m=1$$

이다. [30%]

(ii) 직선 ㉠이 점 C를 지날 때,

$$m(4+2)-(0-1)=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{6}$$

이다. [30%]

(i), (ii)에 의하여 구하는 m의 값의 범위는 $-\frac{1}{6}\le m\le 1$이다. [10%]

답 $-\frac{1}{6}\le m\le 1$

140

세 직선 $x+4y-3=0$, $x-y+2=0$, $7x-2y-21=0$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

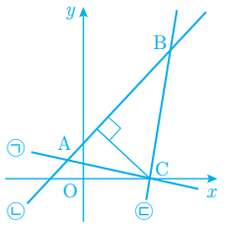
각각의 직선을

$$x+4y-3=0 \quad \cdots ㉠$$

$$x-y+2=0 \quad \cdots ㉡$$

$$7x-2y-21=0 \quad \cdots ㉢$$

이라 하자. 두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A$(-1, 1)$, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B$(5, 7)$, 두 직선 ㉢, ㉠의 교점을 C$(3, 0)$이라 하면 삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같다. [30%]



삼각형 ABC의 밑변을 변 AB로 놓으면

$$\overline{AB}=\sqrt{(5+1)^2+(7-1)^2}=6\sqrt{2}$$

이다. [20%]

한편 삼각형 ABC의 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리와 같다. 즉, 직선 $x-y+2=0$과 점 C$(3, 0)$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}=15$이다. [50%]

답 15

12 원의 방정식

01 원의 방정식

1. 원의 방정식의 표준형: 중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

2. 원의 방정식의 일반형: 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$은

중심: $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, 반지름의 길이: $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원 (단, $A^2+B^2-4C>0$)

02 원과 직선의 위치 관계

1. 원과 직선의 위치 관계: 원과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D, 반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 직선까지의 거리를 d라 하면

(1) $D>0 \iff d<r \iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \iff d=r \iff$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \iff d>r \iff$ 서로 만나지 않는다.

2. 공통현의 방정식: 두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C-(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$$

$$\Rightarrow \quad (A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0$$

3. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0 \quad (\text{단, } k\neq -1)$$

03 원의 접선의 방정식

1. 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식: $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

2. 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식: $x_1x+y_1y=r^2$

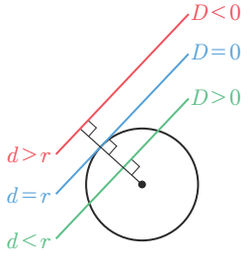
3. 원 밖의 점에서의 접선의 방정식

(1) 접점을 (x_1, y_1)으로 놓고 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용한다.

(2) 기울기가 m인 직선으로 놓고 (원의 중심과 접선 사이의 거리) = (원의 반지름의 길이)를 이용한다.

마·타·노·트

▶ 원과 직선의 위치 관계



▶ 공통현의 방정식

공통현의 방정식은 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식이다. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식에서 $k=-1$이면 공통현의 방정식이 된다.

개념 확인

정답 및 풀이 p.22

[517 ~ 518] 일반형으로 주어진 원의 방정식은 표준형으로, 표준형으로 주어진 원의 방정식은 일반형으로 변형하시오.

141 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ $(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=3+4+9$

답 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$

142 $x^2+(y-6)^2=40$ $x^2+(y^2-12y+36)-40=0$

답 $x^2+y^2-12y-4=0$

[519 ~ 520] 다음 방정식이 나타내는 원의 중심과 반지름의 길이를 각각 구하시오.

143 $(x+3)^2+y^2=36$ $(x+3)^2+y^2=6^2$

답 원의 중심: $(-3, 0)$, 반지름의 길이: 6

144 $x^2+y^2-10x-2y-6=0$ 원의 방정식을 표준형으로 변형하면 $(x-5)^2+(y-1)^2=32$이므로 원의 중심은 $(5, 1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$이다.

답 원의 중심: $(5, 1)$, 반지름의 길이: $4\sqrt{2}$

[521 ~ 524] 다음 조건을 만족시키는 원의 방정식을 구하시오.

145 중심이 $(1, -4)$이고 반지름의 길이가 2인 원 $(x-1)^2+(y+4)^2=2^2$

답 $(x-1)^2+(y+4)^2=4$

146 중심이 $(3, 0)$이고 점 $(1, -3)$을 지나는 원 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $(x-3)^2+y^2=r^2$이다. 이 원이 점 $(1, -3)$을 지나므로 $(1-3)^2+(-3)^2=r^2$에서 $r^2=13$이다. 따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+y^2=13$이다.

답 $(x-3)^2+y^2=13$

147 중심이 $(2, 3)$이고 x축에 접하는 원 원의 반지름의 길이는 3이므로 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$이다.

답 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

148 중심이 $(2, 2)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원 원의 반지름의 길이는 2이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$이다.

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

[525 ~ 527] 원 C와 직선 l의 방정식이 다음과 같을 때, 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 원 C와 직선 l의 위치 관계를 구하시오.

149 $C: x^2+y^2=25$, $l: 3x-y-10=0$ 원 C의 중심은 $(0, 0)$이고 반지름의 길이는 5이다. 원 C의 중심과 직선 l 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

이다. $\sqrt{10}<5$이므로 원 C와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

150 $C: (x-2)^2+(y-3)^2=1$, $l: y=2x+4$ 원 C의 중심은 $(2, 3)$이고 반지름의 길이는 1이다. 원 C의 중심과 직선 l 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|2\cdot 2+3\cdot(-1)+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

이다. $\sqrt{5}>1$이므로 원 C와 직선 l은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

151 $C: (x+1)^2+(y-2)^2=5$, $l: x+2y-8=0$ 원 C의 중심은 $(-1, 2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다. 원 C의 중심과 직선 l 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-1\cdot 1+2\cdot 2-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

이다. 이때, d의 값이 반지름의 길이와 같으므로 원 C와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

[528 ~ 529] 원 C와 직선 l의 방정식이 다음과 같을 때, 이차방정식의 판별식을 이용하여 원 C와 직선 l의 교점의 개수를 구하시오.

152 $C: x^2+y^2=16$, $l: x-y+2=0$ 직선 l의 방정식에서 $y=x+2$이므로 이를 원 C의 방정식에 대입하면 $x^2+(x+2)^2=16$에서 $x^2+2x-6=0$이다. 이 방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1-(-6)=7>0$이다. 따라서 원 C와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 2

153 $C: (x-1)^2+y^2=1$, $l: y=2x-5$ 직선 l의 방정식에서 $y=2x-5$이므로 이를 원 C의 방정식에 대입하면 $(x-1)^2+(2x-5)^2=1$에서 $5x^2-22x+25=0$이다. 이 방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=11^2-5\cdot 25=-4<0$이다. 따라서 원 C와 직선 l은 만나지 않는다.

답 0

[530 ~ 532] 다음 접선의 방정식을 구하시오.

154 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 -1인 접선 기울기가 -1이고 반지름의 길이가 2인 원에 접하는 접선의 방정식은

$$y=-x\pm 2\sqrt{(-1)^2+1}=-x\pm 2\sqrt{2}$$

답 $y=-x+2\sqrt{2}$ 또는 $y=-x-2\sqrt{2}$

155 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선 원 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은 $x+3y=10$이다.

답 $x+3y=10$

156 점 $(2, 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선 접점을 (a, b)로 놓으면 접선의 방정식은 $ax+by=1$이다. 이 직선이 점 $(2, 0)$을 지나므로 $2a=1$에서 $a=\frac{1}{2}$이다. 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=1$에서 $b^2=\frac{3}{4}$이다. 즉, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 점 $(2, 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식은 $x\pm\sqrt{3}y-2=0$이다.

답 $x+\sqrt{3}y-2=0$ 또는 $x-\sqrt{3}y-2=0$

개념 적용

개념원 01. 원의 방정식

1. 원의 방정식의 표준형: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
⇒ 중심: (a, b), 반지름의 길이: r

2. 원의 방정식의 일반형: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
⇒ 중심: $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, 반지름의 길이: $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$
(단, $A^2+B^2-4C>0$)

157

원 $(x-3)^2+(y+1)^2=8$과 중심이 같고 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=9$와 반지름의 길이가 같은 원이 점 $(a, -4)$를 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

원 $(x-3)^2+(y+1)^2=8$과 중심이 같은 원의 중심이 $(3, -1)$이고, 반지름의 길이가 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=9$와 같은 원의 반지름의 길이는 3이다. 즉, 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$이고, 이 원이 점 $(a, -4)$를 지나므로 $x=a$, $y=-4$를 대입하면

$$(a-3)^2+(-4+1)^2=9 \quad \Rightarrow \quad (a-3)^2=0$$

에서 $a=3$이다.

답 ③

158 중요!

두 점 A(4, −3), B(2, 5)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 표준형으로 구하시오.

두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이고 지름의 길이는 선분 AB의 길이와 같다. 선분 AB의 중점의 좌표를 (a, b)라 하면

$$a=\frac{4+2}{2}=3, \quad b=\frac{-3+5}{2}=1$$

에서 $a=3$, $b=1$이고, 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(5+3)^2}=2\sqrt{17}$$

이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{17}$이다. 즉, 중심이 $(3, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-3)^2+(y-1)^2=17$$

답 $(x-3)^2+(y-1)^2=17$

159

세 점 A(1, 0), B(3, 6), C(5, 2)를 지나는 원의 넓이는?

① 5π ② 10π ③ 15π
④ 20π ⑤ 25π

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$라 하자. 세 점 A(1, 0), B(3, 6), C(5, 2)가 원 위의 점이므로 차례대로 대입하여 정리하면

$$A+C=-1 \quad \cdots ㉠$$
$$3A+6B+C=-45 \quad \cdots ㉡$$
$$5A+2B+C=-29 \quad \cdots ㉢$$

이다. 세 방정식 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=-4$, $B=-6$, $C=3$이므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-4x-6y+3=0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-3)^2=10$$

이다. 따라서 세 점 A, B, C를 지나는 원의 넓이는 10π이다.

답 ②

160

중심이 직선 $y=2x$ 위에 있고 두 점 $(2, 3)$, $(-1, 6)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

원의 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 중심의 좌표가 $(a, 2a)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2$$

이다. 이 원이 두 점 $(2, 3)$, $(-1, 6)$을 지나므로

$$(2-a)^2+(3-2a)^2=r^2 \quad \cdots ㉠$$
$$(-1-a)^2+(6-2a)^2=r^2 \quad \cdots ㉡$$

에서 ㉠−㉡을 하면 $a=4$이다. 이 값을 ㉠에 대입하면

$$(2-4)^2+(3-2\cdot4)^2=r^2$$

에서 $r^2=29$이다. 따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-8)^2=29$이다.

답 $(x-4)^2+(y-8)^2=29$

161 중요!

중심이 $(3, -5)$이고 x축에 접하는 원의 방정식이 점 $(7, a)$를 지날 때, 모든 a의 값의 곱은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

중심이 $(3, -5)$이고 x축에 접하는 원은 반지름의 길이가 5이므로 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y+5)^2=25$$

이다. 이 원이 점 $(7, a)$를 지나므로

$$(7-3)^2+(a+5)^2=25 \quad \Rightarrow \quad (a+5)^2=9$$

에서 $a+5=\pm3$이므로 $a=-2$ 또는 $a=-8$이다. 따라서 모든 a의 값의 곱은 16

답 ④

162

두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$으로부터 거리의 비가 1:2인 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로 $2\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$$2\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$

이다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$4\{(x+4)^2+y^2\}=(x-2)^2+y^2$$
$$4(x^2+8x+16+y^2)=x^2-4x+4+y^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+12x+20=0$$

이고, 이를 원의 방정식의 표준형으로 나타내면 $(x+6)^2+y^2=16$이다. 따라서 점 P가 그리는 도형의 방정식은 $(x+6)^2+y^2=16$이다.

답 $(x+6)^2+y^2=16$

개념 02. 원과 직선의 위치 관계

원과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D, 반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 직선까지의 거리를 d라 하면

1. $D>0 \iff d<r \iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
2. $D=0 \iff d=r \iff$ 한 점에서 만난다. (접한다.)
3. $D<0 \iff d>r \iff$ 서로 만나지 않는다.

163 중요

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$와 직선 $3x-4y+k=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

원의 중심 $(2, 1)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot2-4\cdot1+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k+2|}{5}$$

이다. 원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나면

$$\frac{|k+2|}{5}<5 \quad \Rightarrow \quad |k+2|<25$$

에서 $-27<k<23$이다. 따라서 이를 만족하는 정수 k의 개수는 49이다.

답 49

164

중심의 좌표가 $(8, 2)$이고 직선 $x+ky-4=0$에 접하는 원의 넓이가 6π일 때, 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

원의 중심 $(8, 2)$와 직선 $x+ky-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|8+k\cdot2-4|}{\sqrt{1^2+k^2}}=\frac{|2k+4|}{\sqrt{k^2+1}}$$

이다. 원의 넓이가 6π이므로 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이고, 원과 직선이 접하므로

$$\frac{|2k+4|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad |2k+4|=\sqrt{6k^2+6}$$

이 성립한다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$(2k+4)^2=6k^2+6 \quad \Rightarrow \quad k^2-8k-5=0$$

이다. 이 이차방정식 $k^2-8k-5=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-4)^2+5=21>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은 -5이다.

답 -5

개념 03. 원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리

원의 중심 O와 반지름의 길이가 r인 원 밖의 한 점 P와 원 위의 점 사이의 거리는

1. 최댓값: $\overline{OP}+r$
2. 최솟값: $\overline{OP}-r$

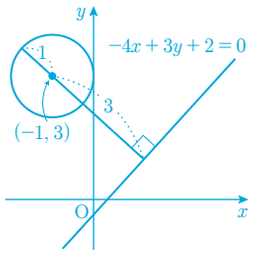
165 중요

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=1$ 위의 한 점과 직선 $-4x+3y+2=0$ 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

원의 중심 $(-1, 3)$과 직선 $-4x+3y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4\cdot(-1)+3\cdot3+2|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=3$$

이다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 원 위의 한 점과 직선 $-4x+3y+2=0$ 사이의 거리의 최댓값은 $3+1=4$이다.



답 4

166

원 $x^2+y^2-6x+8y+5=0$ 위를 움직이는 한 점 P와 직선 $x-2y+9=0$ 위를 움직이는 점 Q가 있다. 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

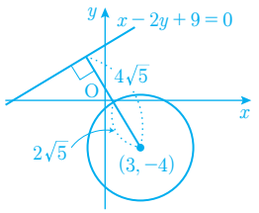
원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x-3)^2+(y+4)^2=20$$

이므로 중심이 $(3, -4)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원이다. 이 원의 중심 $(3, -4)$와 직선 $x-2y+9=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|3-2\cdot(-4)+9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$$

이다. 선분 PQ의 길이의 최솟값은 d에서 반지름의 길이를 뺀 값이므로 $4\sqrt{5}-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$이다.



답 $2\sqrt{5}$

개념 04. 두 원의 위치 관계

두 원의 반지름의 길이 r, r'과 두 원의 중심거리 d에 대하여 두 원의 위치 관계는 다음과 같다.

1. 한 원이 다른 원의 외부에 있을 때: $r+r'<d$
2. 외접할 때: $r+r'=d$
3. 서로 다른 두 점에서 만날 때: $|r-r'|<d<r+r'$
4. 내접할 때: $|r-r'|=d$
5. 한 원이 다른 원의 내부에 있을 때: $|r-r'|>d$

167 중요

두 원 $x^2+y^2=r^2$, $(x+4)^2+(y-3)^2=9$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이를 만족시키는 실수 r의 값의 범위는?

① $r<2$ ② $2<r<5$
③ $2<r<8$ ④ $5<r<8$
⑤ $r>8$

두 원의 중심은 각각 $(0, 0)$, $(-4, 3)$이므로 두 원의 중심거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{(0+4)^2+(0-3)^2}=5$$

이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 r, 3이다. 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나면

$$|r-3|<5<r+3 \quad \Rightarrow \quad -2<r<8,\ r>2$$

이므로 실수 r의 값의 범위는 $2<r<8$이다.

답 ③

168

원 $(x-2)^2+(y-5)^2=r^2$이 원 $(x+5)^2+(y-4)^2=100$의 내부에 있을 때, 이를 만족하는 자연수 r의 최댓값을 구하시오.

한 원이 다른 원의 내부에 있으려면 두 원의 중심거리가 두 원의 반지름의 길이의 차보다 작아야 한다. 두 원의 중심은 각각 $(2, 5)$, $(-5, 4)$이므로 중심거리 d는

$$d=\sqrt{(2+5)^2+(5-4)^2}=5\sqrt{2}$$

이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 r, 10이다. 따라서

$$5\sqrt{2}<|10-r|$$

이다. 이때, 큰 원의 반지름의 길이가 10이므로 $r<10$이다. 그러므로

$$5\sqrt{2}<10-r \quad \Rightarrow \quad r<10-5\sqrt{2}$$

이다. 이때 $7<5\sqrt{2}<8$이므로 $r<2.\text{xxx}$이고 자연수 r의 최댓값은 2이다.

답 2

개념 05. 공통현의 방정식

두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C-(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$$
$$\Rightarrow \quad (A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0$$

169 중요

두 원 $x^2+y^2-6x=0$, $x^2+y^2-4x-8y+3=0$의 서로 다른 두 교점을 지나는 직선과 평행하고, 점 $(4, 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

두 원의 서로 다른 두 교점을 지나는 직선의 방정식은 공통현의 방정식이므로

$$x^2+y^2-6x-(x^2+y^2-4x-8y+3)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-8y+3=0$$

이다. 직선 $2x-8y+3=0$의 기울기는 $\frac{1}{4}$이므로 직선 $2x-8y+3=0$에 평행하고 점 $(4, 3)$을 지나는 직선은

$$y-3=\frac{1}{4}(x-4) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{4}x+2$$

에서 $y=\frac{1}{4}x+2$이다.

답 $y=\frac{1}{4}x+2$

170

두 원 $x^2+y^2=8$, $x^2+y^2-4x+ky=0$의 서로 다른 두 교점을 지나는 직선이 직선 $y=-x+9$에 수직일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

두 원의 서로 다른 두 교점을 지나는 직선의 방정식은 공통현의 방정식이므로

$$(x^2+y^2-8)-(x^2+y^2-4x+ky)=0$$
$$\Rightarrow \quad 4x-ky-8=0 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 직선 ㉠이 직선 $y=-x+9$에 수직이므로 직선 ㉠의 기울기는 1이다. 즉, $\frac{4}{k}=1$에서 $k=4$이다.

답 ④

171

원 $x^2+y^2+2x+ay-3a=0$이 원 $x^2+y^2-4x-4y+2=0$의 둘레를 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

한 원이 다른 원의 둘레를 이등분하려면 두 원의 서로 다른 두 교점을 지나는 직선이 둘레가 이등분 되는 원의 중심을 지나야 한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은 공통현의 방정식이므로

$$x^2+y^2+2x+ay-3a-(x^2+y^2-4x-4y+2)=0$$
$$\Rightarrow \quad 6x+(a+4)y+(-3a-2)=0 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 원 $x^2+y^2-4x-4y+2=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x-2)^2+(y-2)^2=6$$

이므로 중심의 좌표는 $(2, 2)$이다. 따라서 직선 ㉠이 점 $(2, 2)$를 지나야 하므로

$$6\cdot 2+(a+4)\cdot 2+(-3a-2)=0$$

에서 $a=18$이다.

답 18

개념 06. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0 \quad (\text{단, } k\neq -1)$$

172 중요

두 원 $S: x^2+y^2-4x=0$, $T: x^2+y^2-2ax+4y=0$의 교점과 점 $(0, 4)$를 지나는 원의 넓이가 4π일 때, 실수 a의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

두 원 S, T가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $k\neq -1$인 실수 k에 대하여

$$k(x^2+y^2-4x)+(x^2+y^2-2ax+4y)=0 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 이 원이 점 $(0, 4)$를 지나므로 ㉠에 대입하면

$$4^2\cdot k+(4^2+4\cdot 4)=0 \quad \Rightarrow \quad k=-2$$

이다. $k=-2$를 ㉠에 대입하면

$$-2(x^2+y^2-4x)+(x^2+y^2-2ax+4y)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x+a-4)^2+(y-2)^2=(a-4)^2+4$$

이다. 이 원의 넓이가 4π이므로 $(a-4)^2+4=4$에서 $a=4$이다.

답 ①

173

두 원 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$, $x^2+y^2-2x-5=0$의 교점과 점 $(1, 3)$을 지나는 원의 둘레의 길이를 구하시오.

두 원이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $k\neq -1$인 실수 k에 대하여

$$k(x^2+y^2+2x-4y-3)+(x^2+y^2-2x-5)=0 \qquad \cdots \text{㉠}$$

이다. 원 ㉠이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$$k(1^2+3^2+2\cdot 1-4\cdot 3-3)+(1^2+3^2-2\cdot 1-5)=0$$

에서 $k=1$이다. $k=1$을 식 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+(y-1)^2=5$$

이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고 둘레의 길이는 $2\sqrt{5}\pi$이다.

답 $2\sqrt{5}\pi$

개념 07. 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$에 대하여 기울기가 m인 접선

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

174 중요

원 $x^2+y^2=16$에 접하고 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

구하는 접선이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$에 수직이므로 기울기가 2이다. 기울기가 2이고 원 $x^2+y^2=16$에 접하는 직선의 방정식은

$$y=2x\pm 4\sqrt{2^2+1}=2x\pm 4\sqrt{5}$$

이다. 즉, 구하는 접선의 방정식은 $y=2x+4\sqrt{5}$ 또는 $y=2x-4\sqrt{5}$이다.

답 $y=2x+4\sqrt{5}$ 또는 $y=2x-4\sqrt{5}$

175

원 $x^2+y^2-8=0$에 접하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°인 접선의 방정식을 구하시오.

접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 구하는 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이다. 원 $x^2+y^2=8$의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 이 원에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$$y=1\cdot x\pm 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+1}=x\pm 4$$

에서 $y=x+4$ 또는 $y=x-4$이다.

답 $y=x+4$ 또는 $y=x-4$

개념 08. 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$에 대하여 원 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선

$$x_1x+y_1y=r^2$$

176 중요

원 $x^2+y^2=20$ 위의 서로 다른 두 점 $(4, 2)$, (a, b)에서의 접선이 서로 평행할 때, a, b의 값을 각각 구하시오.

점 $(4, 2)$에서의 접선의 방정식은

$$4x+2y=20 \quad \Rightarrow \quad y=-2x+10$$

이므로 기울기가 -2이다. 두 점 $(4, 2)$, (a, b)에서의 접선이 서로 평행하므로 점 (a, b)에서의 접선의 방정식 $ax+by=20$의 기울기도 -2이다. 이때, $b=0$이면 직선 $ax=20$은 직선 $y=-2x+10$에 평행하지 않으므로 $b\neq 0$이다. 따라서 방정식 $ax+by=20$은 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{20}{b}$이므로 $-\frac{a}{b}=-2$에서 $a=2b$이다. 또한 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=20 \quad \cdots ㉠$$

이고 $a=2b$를 ㉠에 대입하면 $b^2=4$이다. 즉, $b=2$일 때 $a=4$이고 $b=-2$일 때 $a=-4$이다. 점 (a, b)는 $(4, 2)$와 다른 점이므로 구하는 값은 $a=-4$, $b=-2$이다.

답 $a=-4$, $b=-2$

177

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 기울기가 -2이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은 $ax+by=10$이므로

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{10}{b} \quad \cdots ㉠$$

이다. 직선 ㉠의 기울기가 -2이므로 $-\frac{a}{b}=-2$에서 $a=2b$이다. 또한, 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=10 \quad \cdots ㉡$$

이다. $a=2b$를 대입하면 $5b^2=10$에서 $b^2=2$이다. 이때, 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$, $b>0$이다. 따라서 $b=\sqrt{2}$이고 ㉡에 대입하면 $a=2\sqrt{2}$이므로 구하는 값은 $a+b=3\sqrt{2}$이다.

답 $3\sqrt{2}$

178

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 $C: x^2+y^2-2ax-4ay=0$의 넓이를 이등분할 때, C의 넓이를 구하시오. (단, a는 양수이다.)

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$$x+2y=5 \quad \cdots ㉠$$

이다. C를 표준형으로 변형하면

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=5a^2$$

C는 중심이 $(a, 2a)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}a$인 원이다. 직선 ㉠이 원 C의 중심 $(a, 2a)$를 지날 때 원이 이등분되므로 $a+2\cdot 2a=5$에서 $a=1$이다. 따라서 C는 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 넓이는 5π이다.

답 5π

개념 09. 원 밖의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$에 대하여

1. 접점을 (x_1, y_1)으로 놓고 원 위의 점에서의 접선의 방정식 이용
2. 기울기가 m인 직선으로 놓고
 (원의 중심과 접선 사이의 거리) = (원의 반지름의 길이) 이용

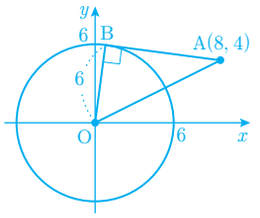
179

점 $\mathrm{A}(8, 4)$에서 원 $x^2+y^2=36$에 그은 한 접선의 접점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

원 $x^2+y^2=36$은 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 6이다. 원 밖의 점 A에서 원에 그은 한 접선의 접점 B에 대하여 선분 OB는 직선 AB에 수직이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+6^2$$

이다. $\overline{\mathrm{OA}}^2=8^2+4^2=80$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2=44$이고 구하는 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$이다.



답 $2\sqrt{11}$

180 중요

점 $(1, -3)$에서 원 $x^2+y^2=8$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓으면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=8 \quad \cdots ㉠$$

이다. 이 접선이 점 $(1, -3)$을 지나므로 ㉠에 대입하면

$$x_1-3y_1=8 \quad \Rightarrow \quad x_1=3y_1+8 \quad \cdots ㉡$$

이다. 한편, 점 (x_1, y_1)이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로 ㉡을 대입하면

$$(3y_1+8)^2+{y_1}^2=8$$

$$\Rightarrow \quad (5y_1+14)(y_1+2)=0$$

에서 $y_1=-\frac{14}{5}$ 또는 $y_1=-2$이다.

(i) $y_1=-\frac{14}{5}$일 때, $x_1=-\frac{2}{5}$이므로 ㉠에 대입하면 $x+7y+20=0$이다.

(ii) $y_1=-2$일 때, $x_1=2$이므로 ㉠에 대입하면 $x-y-4=0$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 접선의 방정식은 $x+7y+20=0$ 또는 $x-y-4=0$이다.

답 $x+7y+20=0$ 또는 $x-y-4=0$

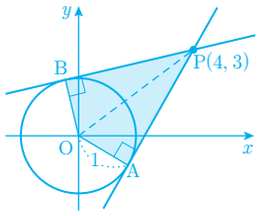
181

점 P(4, 3)에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 사각형 AOBP의 넓이를 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

원 $x^2+y^2=1$의 중심이 O(0, 0)이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

이다. 이때, 직선 OA가 직선 AP에 수직이고 직선 OB가 직선 BP에 수직이므로 두 삼각형 OAP, OBP는 직각삼각형이다. 빗변 OP가 공통이고 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$이므로 두 직각삼각형 OAP, OBP는 서로 합동이다. 이때 피타고라스 정리에 의하여



$$\overline{OP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AP}^2$$

이 성립하고 $\overline{OA}=1$이므로 $\overline{AP}^2=25-1=24$이다.
즉, $\overline{AP}=2\sqrt{6}$이다. 사각형 AOBP의 넓이는 두 삼각형 OAP, OBP의 넓이의 합이므로

$$\square AOBP=2\triangle OAP=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times1=2\sqrt{6}$$

답 $2\sqrt{6}$

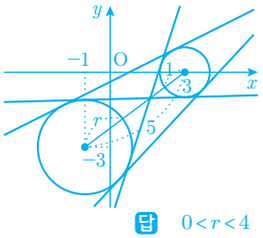
182 마타

두 원 $(x-3)^2+y^2=1$, $(x+1)^2+(y+3)^2=r^2$에 동시에 접하는 직선이 4개가 되도록 하는 양수 r의 값의 범위를 구하시오.

두 원이 만나지 않고, 한 원이 다른 원의 외부에 있으면 두 원에 동시에 접하는 직선이 4개이다. 이때, 두 원의 중심은 각각 (3, 0), (−1, −3)이므로 두 원의 중심거리 d는

$$d=\sqrt{(3+1)^2+(0+3)^2}=5$$

이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, r이므로 $1+r<5$에서 양수 r의 값의 범위는 $0<r<4$이다.



답 $0<r<4$

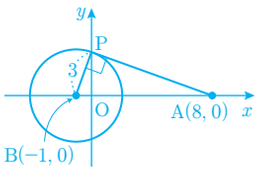
183

원점 O와 점 A(8, 0)으로부터 거리의 비가 1:3인 점 P에 대하여 각 PAO의 크기가 최대일 때, 선분 AP의 길이를 구하시오.

$\overline{OP}:\overline{AP}=1:3$에서 $3\overline{OP}=\overline{AP}$이므로 $9\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$이다. 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$9(x^2+y^2)=(x-8)^2+y^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+2x-8=0$$

이다. 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원의 접선일 때, 각 PAO의 크기가 최대가 된다. 이때, 원의 중심 (−1, 0)을 점 B라 하면 직각삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여



$$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$

이다. $\overline{AB}=9$, $\overline{BP}=3$이므로 $\overline{AP}^2=9^2-3^2=72$
이다. 따라서 선분 AP의 길이는 $6\sqrt{2}$이다.

답 $6\sqrt{2}$

184

점 A(6, 4)와 원 $x^2+y^2-4x-2y-11=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이를 n이라 할 때, 자연수 n의 개수를 구하시오.

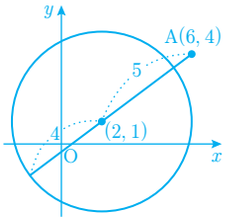
원의 방정식 $x^2+y^2-4x-2y-11=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x-2)^2+(y-1)^2=16$$

이므로 원의 중심은 (2, 1)이고 반지름의 길이는 4이다. 원의 중심 (2, 1)과 점 A 사이의 거리는

$$\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}=5$$

이다. 즉, 자연수 n의 최댓값은 $5+4=9$이고 최솟값은 $5-4=1$이다. 따라서 $1\le n\le9$이므로 자연수 n은 1, 2, 3, …, 9로 그 개수는 9이다.

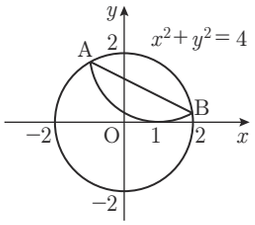


답 9

서술형

185

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$를 선분 AB를 접는 선으로 하여 접었더니 점 $(1, 0)$에서 x축에 접하였다. 이때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



두 점 A, B와 점 $(1, 0)$을 지나는 원은 반지름의 길이가 2이고, 점 $(1, 0)$에서 x축에 접하며 y좌표가 양수인 원이므로 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$이다. 선분 AB는 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-1)^2+(y-2)^2=4$의 공통현이므로 직선 AB의 방정식은

$$(x^2+y^2-4)-(x^2+y^2-2x-4y+1)=0$$

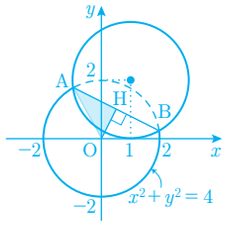
$$\Rightarrow \quad 2x+4y-5=0$$

이다. 이때, 원의 중심 $(0, 0)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 OH의 길이는 점 O와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

이고, 삼각형 OHA는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2=4-\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$$



이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{11}$이다.

답 $\sqrt{11}$

186 기출

좌표평면에 원 $x^2+y^2-10x=0$이 있다. 이 원의 현 중에서 점 $\mathrm{A}(1, 0)$을 지나고 그 길이가 자연수인 현의 개수는?

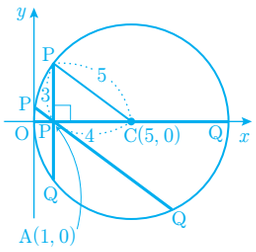
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

원의 방정식 $x^2+y^2-10x=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x-5)^2+y^2=5^2$$

이다. 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 점 $\mathrm{A}(1, 0)$을 지나는 직선이 이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 현 PQ의 길이가 최소일 때는 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$일 때이고 이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이다. 직각삼각형 ACP에서 $\overline{\mathrm{AC}}=4$, $\overline{\mathrm{CP}}=5$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=3$이고,

$$\overline{\mathrm{PQ}}=2\times\overline{\mathrm{AP}}=6$$



이다. 따라서 현 PQ의 길이의 최솟값은 6이다. 현 PQ의 길이가 최대일 때는 현 PQ가 원의 지름일 때이므로 현 PQ의 길이의 최댓값은 10이다. 따라서 현의 길이가 자연수인 경우는 6, 7, 8, 9, 10이다. 이때 길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재한다. 따라서 구하는 현의 개수는 $3\times2+2\times1=8$이다.

답 ③

187

점 $\mathrm{A}(4, 0)$과 원 $x^2+y^2=1$ 위의 임의의 점 P에 대하여 선분 AP를 2:1로 내분하는 점 Q가 그리는 도형의 넓이를 구하시오.

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, b)$로 놓으면 원 위의 점이므로 $a^2+b^2=1$이 성립한다. [20%]
점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(x, y)$로 놓으면 점 Q는 선분 AP를 2:1로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2\cdot a+1\cdot4}{2+1}, \quad y=\frac{2\cdot b+1\cdot0}{2+1}$$

에서 $\mathrm{Q}\left(\frac{2a+4}{3}, \frac{2b}{3}\right)$이다. a, b를 각각 x, y에 대하여 나타내면

$$a=\frac{3x-4}{2}, \quad b=\frac{3}{2}y$$

이다. [40%]
이를 $a^2+b^2=1$에 대입하면

$$\frac{(3x-4)^2}{4}+\frac{9}{4}y^2=1 \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$$

이다. 따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{2}{3}$이므로 넓이는 $\frac{4}{9}\pi$이다. ... [40%]

답 $\frac{4}{9}\pi$

188

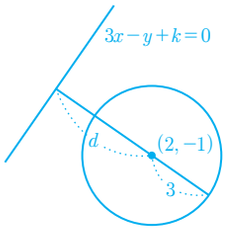
원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 위의 한 점 A와 직선 $y=3x+k$ 사이의 거리의 최댓값이 $3+\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$을 표준형으로 변형하면
$(x-2)^2+(y+1)^2=9$이므로 원의 중심은 $(2, -1)$
이고 반지름의 길이가 3이다. [20%]
원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리 d를 구하면

$$d=\frac{|3\cdot2-(-1)+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|7+k|}{\sqrt{10}}$$

이다. [40%]
원 위의 점 A와 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리의 최댓값은

$$d+3=\frac{|7+k|}{\sqrt{10}}+3$$



이고, 문제의 조건에 의하여

$$\frac{|7+k|}{\sqrt{10}}+3=3+\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad |7+k|=10$$

에서 k가 양수이므로 $k=3$이다. [40%]

답 3

13 도형의 이동

01 평행이동

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

1. **점**: $\mathrm{P}(x, y) \longrightarrow \mathrm{P}'(x+a, y+b)$

2. **도형**: $f(x, y)=0 \longrightarrow f(x-a, y-b)=0$

02 대칭이동

1. 점 (x, y)와 도형 $f(x, y)=0$을 대칭이동하면 다음과 같다.

대칭이동	(x, y)	$f(x, y)=0$
x축	$(x, -y)$	$f(x, -y)=0$
y축	$(-x, y)$	$f(-x, y)=0$
원점	$(-x, -y)$	$f(-x, -y)=0$
$y=x$	(y, x)	$f(y, x)=0$
$y=-x$	$(-y, -x)$	$f(-y, -x)=0$

2. **점 (a, b)에 대한 대칭이동**

점 P를 점 $\mathrm{A}(a, b)$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 A는 선분 PP′의 중점임을 이용한다.

3. **직선 $x=a$, 직선 $y=b$에 대한 대칭이동**

(1) 직선 $x=a$에 대한 대칭이동: 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 (a, y)는 선분 PP′의 중점임을 이용한다.

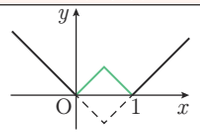
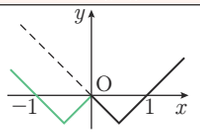
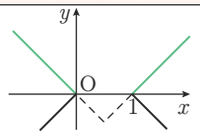
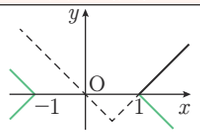
(2) 직선 $y=b$에 대한 대칭이동: 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=b$에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라 하면 점 (x, b)는 선분 PP′의 중점임을 이용한다.

03 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

절댓값 기호 안의 식이 **0이 되는 값**을 기준으로 범위를 나누어 그린다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽과 같을 때, 네 그래프

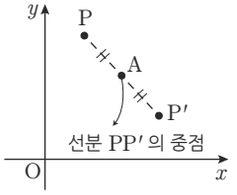
$$y=|f(x)|, \quad y=f(|x|), \quad |y|=f(x), \quad |y|=f(|x|)$$

를 각각 좌표평면에 나타내는 방법과 그 결과는 다음과 같다.

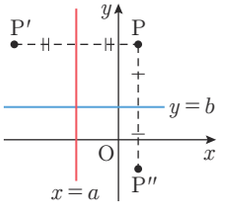
$y=\lvert f(x)\rvert$	$y=f(\lvert x\rvert)$	$\lvert y\rvert=f(x)$	$\lvert y\rvert=f(\lvert x\rvert)$
			
$f(x)\le 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동	$x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동	$y\ge 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동	$x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분을 x축, y축, 원점 대칭이동

마·타·노·트

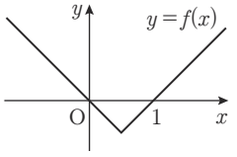
▶ 점 A에 대한 대칭이동



▶ 직선 $x=a$, 직선 $y=b$에 대한 대칭이동



▶ $y=f(x)$의 그래프



정답 및 풀이 p.25

[565 ~ 570] 다음을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표 혹은 도형의 방정식을 구하시오.

189 $(3, -5)$ $(3+2, -5-1) \Rightarrow (5, -6)$

답 $(5, -6)$

190 $y=3x-4$ $y+1=3(x-2)-4 \Rightarrow y=3x-11$

답 $y=3x-11$

191 $2x+3y-1=0$ $2(x-2)+3(y+1)-1=0 \Rightarrow 2x+3y-2=0$

답 $2x+3y-2=0$

192 $(x-1)^2+(y+3)^2=12$ $(x-2-1)^2+(y+1+3)^2=12$

답 $(x-3)^2+(y+4)^2=12$

193 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2+4(x-2)-2(y+1)-4=0$

답 $x^2+y^2=9$

194 $y=x^2-4$ $y+1=(x-2)^2-4 \Rightarrow y=x^2-4x-1$

답 $y=x^2-4x-1$

[571 ~ 575] 다음을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 혹은 도형의 방정식을 각각 구하시오.

195 $(2, -4)$ x축: $(2, -(-4))$ y축: $(-2, -4)$, 원점: $(-2, -(-4))$

직선 $y=x$: $(-4, 2)$, 직선 $y=-x$: $(-(-4), -2)$

답 풀이 참조

196 $y=x+4$ x축: $-y=x+4$, y축: $y=-x+4$, 원점: $-y=-x+4$

직선 $y=x$: $x=y+4$, 직선 $y=-x$: $-x=-y+4$

답 풀이 참조

197 $x-2y+3=0$ x축: $x+2y+3=0$, y축: $-x-2y+3=0$,

원점: $-x+2y+3=0$, 직선 $y=x$: $y-2x+3=0$, 직선 $y=-x$: $-y+2x+3=0$

답 풀이 참조

198 $(x+2)^2+(y-1)^2=6$ x축: $(x+2)^2+(-y-1)^2=6$,

y축: $(-x+2)^2+(y-1)^2=6$, 원점: $(-x+2)^2+(-y-1)^2=6$,

직선 $y=x$: $(y+2)^2+(x-1)^2=6$, 직선 $y=-x$: $(-y+2)^2+(-x-1)^2=6$

답 풀이 참조

199 $x^2+y^2-6x+4y+3=0$ x축: $x^2+(-y)^2-6x-4y+3=0$,

y축: $(-x)^2+y^2+6x+4y+3=0$, 원점: $(-x)^2+(-y)^2+6x-4y+3=0$,

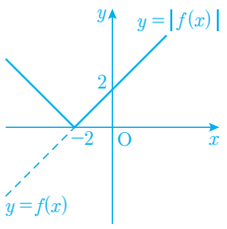
직선 $y=x$: $y^2+x^2-6y+4x+3=0$,

직선 $y=-x$: $(-y)^2+(-x)^2-6\cdot(-y)+4\cdot(-x)+3=0$

답 풀이 참조

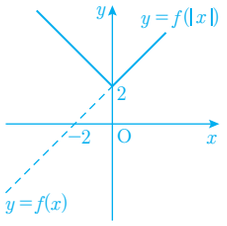
[576 ~ 579] 함수 $f(x)=x+2$에 대하여 다음 그래프를 그리시오.

200 $y=|f(x)|$



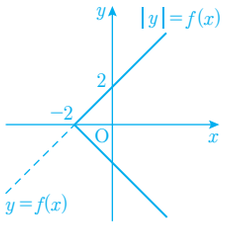
답 풀이 참조

201 $y=f(|x|)$



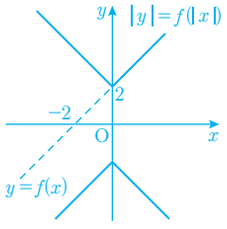
답 풀이 참조

202 $|y|=f(x)$



답 풀이 참조

203 $|y|=f(|x|)$



답 풀이 참조

개념 적용

개념 01. 점과 도형의 평행이동

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

1. 점 (x, y) $\longrightarrow$ $(x+m, y+n)$
2. 도형 $f(x, y)=0$ $\longrightarrow$ $f(x-m, y-n)=0$

204

점 $\mathrm{P}(a, a-2)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점이 직선 $4x-3y+6=0$ 위에 있을 때, a의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

점 P를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(a-3, a+2)$이다. 이 점이 직선 $4x-3y+6=0$ 위에 있으므로
$4(a-3)-3(a+2)+6=a-12=0$에서 $a=12$이다.

답 ③

205 중요

직선 $y=3x+k$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 직선 $y=3x+4$가 될 때, 상수 k의 값은?

① -7 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 7

직선 $y=3x+k$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$$y-3=3(x+2)+k \quad \Rightarrow \quad y=3x+k+9$$

이다. 따라서 $k+9=4$이므로 $k=-5$이다.

답 ②

206

직선 $2x-y+4=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 36일 때, 모든 실수 m의 값의 곱을 구하시오.

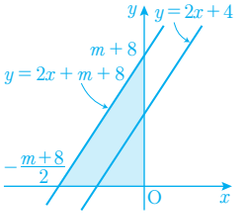
주어진 직선을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x+2)-(y-m)+4=0 \quad \Rightarrow \quad y=2x+m+8$$

이다. 즉, y절편이 $m+8$이고 x절편이 $-\frac{m+8}{2}$이다.
이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 넓이는

$$\frac{1}{2}\times|m+8|\times\left|\frac{m+8}{2}\right|=\frac{(m+8)^2}{4}=36$$

에서 $m+8=\pm12$이므로 $m=4$ 또는 $m=-20$이다. 따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 -80이다.



답 -80

개념 02. 점과 도형의 대칭이동

대칭이동	점 (x, y)	도형 $f(x, y)=0$
x축	$(x, -y)$	$f(x, -y)=0$
y축	$(-x, y)$	$f(-x, y)=0$
원점	$(-x, -y)$	$f(-x, -y)=0$
$y=x$	(y, x)	$f(y, x)=0$
$y=-x$	$(-y, -x)$	$f(-y, -x)=0$

207

점 $\mathrm{A}(4, 5)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후, x축에 대하여 대칭이동하였더니 원점 O로부터 거리가 처음의 거리의 2배가 되었다. 이때, 양수 a의 값을 구하시오.

점 A를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점 A′의 좌표는 $(4+a, 8)$이고, 점 A′를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A″의 좌표는 $(4+a, -8)$이다. 선분 OA의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$이므로 선분 OA″의 길이는 그 2배인 $2\sqrt{41}$이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{OA''}}=\sqrt{(4+a)^2+(-8)^2}=2\sqrt{41} \quad \Rightarrow \quad (a+4)^2=100$$

에서 $a=6$ 또는 $a=-14$이다. 따라서 양수 a의 값은 6이다.

답 6

208 중요

직선 $4x-3y+k=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$에 접할 때, 양수 k의 값을 구하시오.

직선 $4x-3y+k=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$4y-3x+k=0 \quad \Rightarrow \quad -3x+4y+k=0$$

이다. 이 직선이 주어진 원에 접하면 원의 중심 $(2, -3)$과 직선 $-3x+4y+k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 4와 같다.

$$\frac{|-3\cdot2+4\cdot(-3)+k|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=4$$

에서 $|k-18|=20$이므로 이를 만족하는 양수 k의 값은 38이다.

답 38

209

좌표평면 위의 점 (a, b)가 다음 규칙에 따라 이동할 때, 점 $(1, 5)$가 멈출 때까지 이동한 횟수를 구하시오.

(가) $ab>0$이면 점 $(a-4, b-1)$로 이동한다.
(나) $ab<0$이면 y축에 대하여 대칭이동한다.
(다) $ab=0$이면 이동을 멈춘다.

점 $(1, 5)$가 조건에 따라 멈출 때까지 이동하면 다음과 같다.

$$(1, 5)\xrightarrow{1(가)}(-3, 4)\xrightarrow{2(나)}(3, 4)\xrightarrow{3(가)}(-1, 3)\xrightarrow{4(나)}(1, 3)\xrightarrow{5(가)}(-3, 2)$$
$$\xrightarrow{6(나)}(3, 2)\xrightarrow{7(가)}(-1, 1)\xrightarrow{8(나)}(1, 1)\xrightarrow{9(가)}(-3, 0)\ \text{멈춤}\ (\because (다))$$

따라서 이동한 횟수는 총 9회이다.

답 9

210 중요!

원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$와 겹쳐졌다. 이때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$을 표준형으로 변형하면 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$이다.
이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$$(x-1-a)^2+(y-2-b)^2=4$$

이고, 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$와 같으므로 $a=3$, $b=-3$이다. 따라서 구하는 값은 $a-b=3-(-3)=6$이다.

답 ④

211

원 $x^2+y^2+4ax-2by-5=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 포물선 $y=-x^2+4x$의 꼭짓점과 일치할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

원 $x^2+y^2+4ax-2by-5=0$을 표준형으로 변형하면
$(x+2a)^2+(y-b)^2=4a^2+b^2+5$이므로 중심이 $(-2a, b)$인 원이다. 이 원을 원점에 대하여 대칭이동하면 원의 중심이 $(2a, -b)$로 이동한다. 한편, 포물선 $y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$는 꼭짓점이 $(2, 4)$이다. 따라서

$$2a=2, \quad -b=4$$

에서 $a=1$, $b=-4$이다.

답 $a=1$, $b=-4$

212

포물선 $y=x^2-4x+3$을 x축에 대하여 대칭이동한 후 다시 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점이 직선 $y=2x+k$ 위에 있을 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

포물선 $y=x^2-4x+3$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2-4x+3 \quad \Rightarrow \quad y=-x^2+4x-3$$

이고, 다시 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=-x^2-4x-3=-(x+2)^2+1$$

이다. 이 포물선의 꼭짓점인 $(-2, 1)$이 직선 $y=2x+k$ 위에 있으므로 대입하면 $1=-4+k$에서 $k=5$이다.

답 ⑤

개념 03. 평행이동과 대칭이동의 도형에의 응용

주어진 점이나 도형을 두 번 이상 평행이동과 대칭이동을 하는 경우, 조건에 따라 차례대로 이동한다.

213 중요!

직선 $x-3y+2=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이 네 점 A(2, 3), B(4, 0), C(6, 3), D(4, 6)을 꼭짓점으로 하는 마름모 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 다음 중 a, b 사이의 관계식으로 옳은 것은?

① $a+3b=0$ ② $a-3b+3=0$
③ $2a-3b=0$ ④ $2a-3b+3=0$
⑤ $3a-2b-3=0$

직선 $x-3y+2=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $(x-a)-3(y-b)+2=0$이다. 이
직선이 마름모의 넓이를 이등분하려면 마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 지나야 한다. 즉, 대각선 AC의 중점 $(4, 3)$이 직선 $(x-a)-3(y-b)+2=0$ 위에 있으므로 대입하면 $a-3b+3=0$의 관계식을 얻을 수 있다.

답 ②

214

원 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 넓이를 직선 $y=-4x+k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은?

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

원 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$y^2+x^2-2y+4x-4=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2+(y-1)^2=9$$

이다. 따라서 직선 $y=-4x+k$가 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-2, 1)$을 지나야 하므로 $1=-4\cdot(-2)+k$에서 $k=-7$이다.

답 ①

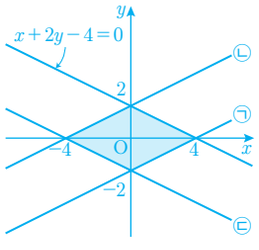
215

직선 $x+2y-4=0$과 이 직선을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 네 개의 직선에 의하여 둘러싸인 사각형의 넓이를 구하시오.

직선 $x+2y-4=0$을 조건에 따라 각각 대칭이동하면 다음과 같다.

x축 대칭: $x-2y-4=0$ … ㉠
y축 대칭: $x-2y+4=0$ … ㉡
원점 대칭: $x+2y+4=0$ … ㉢

좌표평면에 직선 $x+2y-4=0$과 세 직선 ㉠, ㉡, ㉢을 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 따라서 네 직선으로 둘러싸인 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times8=16$이다.



답 16

개념 04. 점 (a, b)에 대한 대칭이동

점 (a, b)에 대하여 대칭이동하면

1. 점 (x, y) $\longrightarrow$ $(2a-x, 2b-y)$
2. 도형 $f(x, y)=0$ $\longrightarrow$ $f(2a-x, 2b-y)=0$

216 중요!

점 $(2a-3, 3)$을 점 $(1, -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(5, b-1)$일 때, $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

두 점 $(2a-3, 3)$, $(5, b-1)$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1, -1)$이므로

$$\frac{2a-3+5}{2}=1, \quad \frac{3+b-1}{2}=-1$$

에서 $a=0$, $b=-4$이다. 따라서 $a+b=-4$이다.

답 ①

217

두 포물선 $y=x^2-8x+15$, $y=-x^2+4x+7$이 점 $\mathrm{P}(a, b)$에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

두 포물선을 각각 표준형으로 변형하면 $y=(x-4)^2-1$, $y=-(x-2)^2+11$이다. 이때, 각각의 꼭짓점 $(4, -1)$, $(2, 11)$도 점 P에 대하여 대칭이므로 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이 P이다. 즉, $a=\frac{4+2}{2}=3$, $b=\frac{-1+11}{2}=5$에서 $ab=15$이다.

답 ④

218

직선 $y=2x+a$를 점 $(-3, 1)$에 대하여 대칭이동한 직선이 $y=2x+11$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

직선 $y=2x+a$ 위의 점 (x, y)를 점 $(-3, 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 (x', y')라 하면

$$x'=2\cdot(-3)-x=-6-x, \quad y'=2\cdot 1-y=2-y$$

에서 $(-6-x, 2-y)$이다. 이 점이 대칭이동한 직선 $y=2x+11$ 위의 점이므로

$$(2-y)=2\cdot(-6-x)+a \quad \Rightarrow \quad y=2x+14-a$$

에서 직선 $y=2x+14-a$가 직선 $y=2x+11$과 일치하므로 $14-a=11$이다. 즉, $a=3$이다.

답 3

219

원 $x^2+y^2-6x+8y=0$을 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

원 $x^2+y^2-6x+8y=0$을 표준형으로 변형하면 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$이다. 원의 중심 $(3, -4)$를 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이동한 점을 (a, b)라 하면 두 점 $(3, -4)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$$1=\frac{3+a}{2}, \quad 2=\frac{-4+b}{2} \quad \Rightarrow \quad a=-1, \ b=8$$

이다. 따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-8)^2=25$이다.

답 $(x+1)^2+(y-8)^2=25$

개념 05. 직선 $x=a$, $y=b$에 대한 대칭이동

1. 직선 $x=a$에 대한 대칭이동: 점 (x, y) $\longrightarrow$ $(2a-x, y)$
2. 직선 $y=b$에 대한 대칭이동: 점 (x, y) $\longrightarrow$ $(x, 2b-y)$

220 중요!

점 $(6, 2)$를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(2, b)$일 때, 상수 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

점 $(6, 2)$를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2a-6, 2)$이다. $2a-6=2$, $b=2$이므로 $a=4$, $b=2$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=6$이다.

답 ④

221

포물선 $y=x^2-6x+a$를 직선 $y=-1$에 대하여 대칭이동한 도형의 꼭짓점의 좌표가 $(b, -6)$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

포물선 $y=x^2-6x+a$를 표준형으로 변형하면 $y=(x-3)^2+a-9$이므로 꼭짓점의 좌표가 $(3, a-9)$이다. 주어진 포물선을 직선 $y=-1$에 대하여 대칭이동하면 꼭짓점 $(3, a-9)$가 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이동한 점 $(3, 2\cdot(-1)-(a-9))$로 이동한다. 즉, $b=3$이고 $7-a=-6$이므로 $a=13$이다.

답 $a=13$, $b=3$

개념 06. 대칭이동을 이용한 거리의 합의 최솟값

두 선분을 이루는 점들이 일직선 위에 있도록 점을 대칭이동한 후 하나의 선분의 길이를 구한다. 좌표평면에 나타내면 더 쉽게 구할 수 있다.

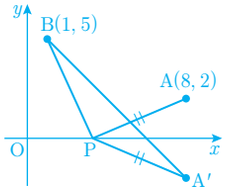
222 중요

두 점 A(8, 2), B(1, 5)와 x축 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하시오.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(8, −2)이다. $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$$

이다. $\overline{A'B}=\sqrt{(1-8)^2+(5+2)^2}=7\sqrt{2}$이므로 구하는 최솟값은 $7\sqrt{2}$이다.



답 $7\sqrt{2}$

223

두 점 A(1, 3), B(3, 1)과 y축 위의 한 점 P, x축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 구하시오.

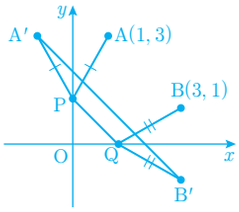
점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하고, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$$A'(-1, 3),\quad B'(3, -1)$$

이다. 이때, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이고, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}$$

이다. $\overline{A'B'}=\sqrt{(3+1)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$이므로 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.



답 $4\sqrt{2}$

224

좌표평면 위의 두 점 A(1, 4), B(6, −1)과 직선 $x+y-4=0$ 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하시오.

점 A를 직선 $x+y-4=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$라 하자. 선분 AA′의 중점의 좌표 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$가 직선 $x+y-4=0$ 위의 점이므로

$$\frac{a+1}{2}+\frac{b+4}{2}-4=0 \quad\Rightarrow\quad a+b=3 \quad\cdots\ ㉠$$

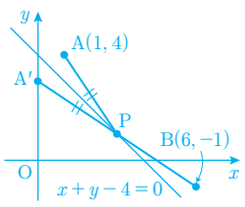
이다. 또한, 직선 AA′가 직선 $x+y-4=0$과 서로 수직이므로 직선 AA′의 기울기 $\frac{b-4}{a-1}$는 1이다. 즉, $b-4=a-1$에서 $b=a+3$이다. ㉠과 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$이므로 A′(0, 3)이다. 이때, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$$

이다. 따라서

$$\overline{A'B}=\sqrt{(6-0)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{13}$$

이므로 구하는 최솟값은 $2\sqrt{13}$이다.



답 $2\sqrt{13}$

개념 07. 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나누어서 그린다.

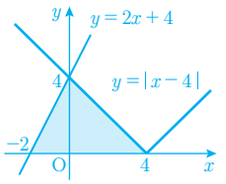
225 중요

좌표평면에서 방정식 $y=|x-4|$가 나타내는 도형과 x축, 직선 $y=2x+4$로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

도형 $y=|x-4|$와 직선 $y=2x+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, 구하는 삼각형은 세 점 (0, 4), (4, 0), (−2, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(2+4)\times4=12$$

에서 12이다.



답 12

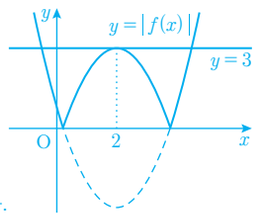
226

좌표평면에서 함수 $f(x)=x^2-4x+1$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 오직 세 점에서만 만날 때, 상수 k의 값을 구하시오.

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분을 그대로 두고 $y<0$인 부분만 x축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이다. 이때, $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 오직 세 점에서만 만나면 이 직선이

$$y=-f(x)=-(x-2)^2+3$$

의 꼭짓점 (2, 3)을 지나므로 구하는 값은 $k=3$이다.



답 3

227

함수 $y=|x-2|-|x|+|x+2|$의 그래프를 그리고, 이 함수의 최솟값을 구하시오.

함수 $y=|x-2|-|x|+|x+2|$에서 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 값은 −2, 0, 2이므로 이를 기준으로 x의 값의 범위를 나눌 수 있다.

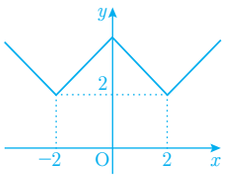
(i) $x<-2$일 때, $y=-(x-2)+x-(x+2)=-x$

(ii) $-2\leq x<0$일 때, $y=-(x-2)+x+(x+2)=x+4$

(iii) $0\leq x<2$일 때, $y=-(x-2)-x+(x+2)=-x+4$

(iv) $x\geq2$일 때, $y=(x-2)-x+(x+2)=x$

(i)~(iv)에서 함수 $y=|x-2|-|x|+|x+2|$의 그래프는 그림과 같고, 최솟값은 2이다.



답 최솟값: 2, 그래프: 풀이 참조

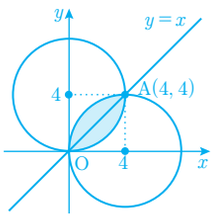
228

원 $x^2+(y-4)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원과 처음의 원이 겹쳐지는 부분의 넓이를 구하시오.

원 $x^2+(y-4)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$y^2+(x-4)^2=16 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2+y^2=16$$

이다. 두 원의 교점은 오른쪽 그림과 같이 원점 O와 점 A(4, 4)이고 겹쳐지는 부분은 그림의 색칠된 부분과 같다. 구하는 넓이는 사분원에서 삼각형을 뺀 넓이의 2배이므로



$$2\left(\frac{1}{4}\cdot 16\pi-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\right)=8\pi-16$$

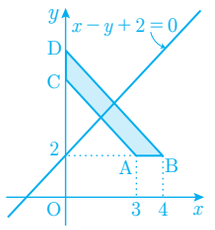
에서 $8\pi-16$이다.

답 $8\pi-16$

229

두 점 A(3, 2), B(4, 2)를 직선 $x-y+2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 C, D라 할 때, 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 구하시오.

두 점 C, D의 좌표를 각각 $C(p, q)$, $D(s, t)$로 놓았을 때, 선분 AC의 중점 $\left(\frac{3+p}{2}, \frac{2+q}{2}\right)$와 선분 BD의 중점 $\left(\frac{4+s}{2}, \frac{2+t}{2}\right)$가 모두 직선 $x-y+2=0$ 위에 있으므로



$$p-q+5=0, \quad s-t+6=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한, 직선 AC, BD는 각각 직선 $x-y+2=0$과 수직이므로 기울기가 -1이다. 따라서

$$\frac{2-q}{3-p}=-1, \ \frac{2-t}{4-s}=-1 \quad \Rightarrow \quad p+q=5, \ s+t=6 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 식 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=0$, $q=5$이고 $s=0$, $t=6$이므로 C(0, 5), D(0, 6)이고 사각형 ABDC는 그림과 같다. 그러므로 사각형 ABDC의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(6-2)-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(5-2)=\frac{7}{2}$에서 $\frac{7}{2}$이다.

답 $\frac{7}{2}$

230

직선 $3x-y+6=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 원 $(x-1)^2+y^2=10$에 접할 때, 음수 m의 값을 구하시오.

직선 $3x-y+6=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$3(x-m)-(y+2)+6=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-y-3m+4=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 직선이 원 $(x-1)^2+y^2=10$에 접해야 하므로 원의 중심 $(1, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같다.

$$\sqrt{10}=\frac{|3\cdot 1-3m+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} \quad \Rightarrow \quad 10=|-3m+7|$$

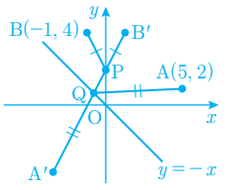
에서 $m=-1$ 또는 $\frac{17}{3}$이므로 음수 m의 값은 -1이다.

답 -1

231

두 점 A(5, 2), B(−1, 4)와 y축 위의 한 점 P, 직선 $y=-x$ 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하시오.

두 점 A, B와 직선 $y=-x$를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 A를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



$$A'(-2, -5), \quad B'(1, 4)$$

이다. y축 위의 한 점 P와 직선 $y=-x$ 위의 한 점 Q에 대하여

$$\overline{BP}=\overline{B'P}, \quad \overline{AQ}=\overline{A'Q}$$

이 성립한다. 이때,

$$\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}=\overline{A'Q}+\overline{QP}+\overline{PB'}\geq\overline{A'B'}$$

이다. $\overline{A'B'}=\sqrt{(1+2)^2+(4+5)^2}=3\sqrt{10}$이므로 구하는 최솟값은 $3\sqrt{10}$이다.

답 $3\sqrt{10}$

서술형

232

직선 $2x+y-3=0$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2, k)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.

직선 $2x+y-3=0$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$라 하면 선분 PP'의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이다. 따라서

$$\frac{x+x'}{2}-\frac{y+y'}{2}+1=0 \quad \Rightarrow \quad x-y=-x'+y'-2 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 한편, 직선 PP'은 직선 $x-y+1=0$과 서로 수직이므로 기울기가 -1이어야 한다. 따라서

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-1 \quad \Rightarrow \quad x+y=x'+y' \qquad \cdots ㉡$$

이 성립한다. ㉠, ㉡을 연립하여 x, y를 x', y'에 대한 식으로 나타내면

$$x=y'-1, \quad y=x'+1$$

이다. 이를 방정식 $2x+y-3=0$에 대입하면 $x'+2y'-4=0$이다. 따라서 직선 $2x+y-3=0$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x+2y-4=0$이다. 점 $(2, k)$가 직선 $x+2y-4=0$을 지나므로 $2+2\cdot k-4=0$에서 $k=1$이다.

답 1

233 마타

함수 $f(x)=x^2+2kx+k+12$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 일치하도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 일치하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $y<0$인 부분이 없어야 한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$x^2+2kx+k+12\geq 0$$

이다. 최고차항의 계수가 양수이므로 x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+k+12=0$의 판별식 D에 대하여

$$\frac{D}{4}=k^2-1\cdot(k+12)=(k+3)(k-4)\leq 0$$

이 성립한다. k에 대한 이차부등식을 풀면 $-3\leq k\leq 4$이므로 이를 만족하는 정수 k는 $-3, -2, -1, \ldots, 4$로 그 개수는 8이다.

답 8

234

포물선 $y=-x^2-2ax-5$를 원점에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점이 $y=-x+2$ 위에 있을 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

포물선 $y=-x^2-2ax-5$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$-y=-(-x)^2-2a\cdot(-x)-5 \quad \Rightarrow \quad y=x^2-2ax+5$$

이다. [30%]

이를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$y+2=x^2-2ax+5 \quad \Rightarrow \quad y=x^2-2ax+3$$

이다. [30%]

즉, 포물선 $y=x^2-2ax+3=(x-a)^2+3-a^2$의 꼭짓점 $(a, 3-a^2)$이 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$$3-a^2=-a+2 \quad \Rightarrow \quad a^2-a-1=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot(-1)=5>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 1이다. [40%]

답 1

235

점 $\mathrm{A}(8, 2)$와 직선 $y=x$ 위를 움직이는 한 점 P, x축 위를 움직이는 한 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$의 최솟값을 구하시오.

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A', x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면

$$\mathrm{A}'(2, 8), \quad \mathrm{A}''(8, -2)$$

이다. [30%]

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}$이고 $\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{QA}''}$이므로

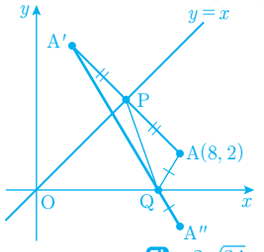
$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$$
$$=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}''}\geq\overline{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}$$

이다. [50%]

선분 $\mathrm{A}'\mathrm{A}''$의 길이는

$$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}=\sqrt{(8-2)^2+(-2-8)^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$$

이므로 구하는 최솟값은 $2\sqrt{34}$이다. ... [20%]



답 $2\sqrt{34}$

마무리를 위한 자가진단 모의고사,

책 거 리

*책거리[책-꺼리] : 옛 서당, 글방에서 책 한 권을 다 읽어 떼었을 때 스승에게 감사하고 친구들과 함께 자축 하던 일

〈 수학(상) 〉

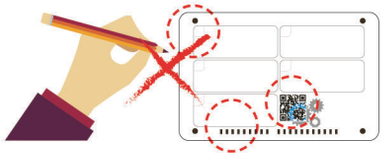
성명		수험번호	0	1	0	-					-				

○ 답안지의 해당 번호란에 반듯한 필체로 답을 작성해주세요. 답안 인식 범위는 빨간 선 내부입니다. 선을 벗어나거나 글자가 작은 경우 인식률이 떨어집니다.

예) 1 $3a-b$

잘못된 예) 1 $3a-b$ ✗ 1 $3a-b$ ✗ 1 $3a-b$ ✗

○ 답안지의 모서리에 위치한 네 점과 하단의 검정박스, QR코드는 답안을 인식하는 좌표이므로 훼손하지 마세요.



○ 문항에 따라 배점이 다르니 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고해주세요.

○ 채점과 정답 및 해설 확인, 진단평가에 따른 치료문제는 마타수학 앱을 통해 확인하실 수 있습니다.

1

① 구글 플레이, 애플 앱 스토어에서 "마타수학"을 검색하거나 QR코드를 스캔하여 앱을 설치하세요.

2



② 어플을 실행시켜 메뉴바의 QR 카메라 버튼을 누르세요.

3



③ 답안의 검정색 원을 촬영범위에 맞추고 촬영버튼을 누르세요.

4



④ 필기한 답안들이 OCR기술로 자동 인식되어 나타납니다.

VITRUV

마무리를 위한 자가진단 모의고사, 기본

책 거 리

〈 수학(상) 〉

제한시간 50분

/60점

1. 세 다항식 A, B, C가

$$A=x^2-2x+2,\quad B=x^2+3x+4,\quad C=x^2+2x+5$$

일 때, 다항식 $AB-AC$를 구하시오. [3점]

2. 점 $(1, 2)$를 지나고 직선 $y=3x+6$에 평행한 직선이 점 $(3, a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. [3점]

3. 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 최고차항의 계수가 1이고 α^2+1, β^2+1을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하시오. [3점]

4. 이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프가 직선 $y=x+2$와 접할 때, 음수 a의 값을 구하시오. [3점]

5. 두 점 A$(1, 6)$, B$(9, 2)$와 x축 위에 있는 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오. [3점]

마타수학 책거리(기본) 답안지 (1/3)

1

2

3

4

5

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

VITRUV

6. 다항식 $P(x)$에 대하여

$$x^3+ax+b=(x-1)(x-2)P(x)+3$$

이 x에 대한 항등식일 때, $P(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

7. x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 3, $-2+i$일 때, 세 실수 a, b, c에 대하여 $ab-c$의 값을 구하시오. [4점]

8. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x-3y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$의 한 근이 $(x, y)=(3, 2)$일 때, 나머지 한 근을 $(x, y)=(\alpha, \beta)$라 하자. $\alpha\beta$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

9. $\sqrt{40\cdot42\cdot44\cdot46+16}$의 값을 구하시오. [4점]

10. 두 점 A$(-1, -4)$, B$(7, 4)$를 이은 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점 P가 제4사분면에 있을 때, t의 값의 범위는 $\alpha<t<\beta$이다. $\frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구하시오. (단, $0<t<1$) [4점]

마타수학 **책거리(기본)** 답안지 (2/3)

6	9
7	10
8	

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

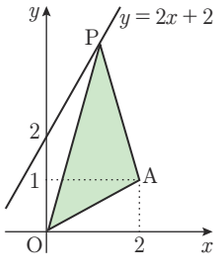
VITRUV

마무리를 위한 자가진단 모의고사, 기본

책 거 리

〈 수학(상) 〉

11. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 O(0, 0), A(2, 1)이 있고 직선 $y=2x+2$ 위에 한 점 P가 있다. 삼각형 OAP의 넓이가 5일 때, 점 P의 y좌표를 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위에 있다.) [5점]



12. $i(1+i)^n$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [5점]

마타수학 **책 거 리 (기본)** 답안지 (3/3)

11

12

13

14

15

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

VITRUV

13. 어느 옷가게에서 패딩 한 개의 가격이 20만 원이면 하루에 100개가 판매된다. 패딩 한 개의 가격을 1만 원씩 인하할 때마다 패딩의 하루 판매량이 10개씩 증가할 때, 하루의 패딩 판매액의 최댓값은 a만 원이다. a의 값을 구하시오. [5점]

14. 점 A(2, 1)에서 원 $C: x^2+y^2=1$에 그은 접선 중 x축에 평행하지 않은 접선을 l이라 하고 접선 l과 원 C의 접점을 B라 하자. 이때 점 B를 지나고 접선 l과 수직인 직선의 방정식을 구하시오. [5점]

15. x에 대한 연립부등식 $\begin{cases}(x-1)(x-9)\geq 0\\(x-a)(x-a^2)\leq 0\end{cases}$을 만족시키는 정수 x가 존재하지 않을 때, $\alpha<a<\beta$ 또는 $\gamma<a<\delta$이다. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [5점]